LORE LORENTZ SCHULE

Training Differentialrechnung einschließlich Extrem- und Wendepunkten
(ganzrationale Funktionen)

	Aufgabe	Lösung
1	Gegeben ist f mit $f(x) = (x + 2)(x - 5)$; $x \in IR$. Bringen Sie f auf Normalform und geben Sie die Nullstellen an.	Vorgehensweise: Ausmultiplizieren (also jeden Summenaden der ersten Klammer mit jedem der zweiten multiplizieren): $(x) = x^2 - 5 \cdot x + 2 \cdot x - 10$ $\underline{x^2 - 3 \cdot x - 10}$ Dies ist die Normalform. Angegebn war die Funktion aber in der faktorisierten Form. Für die Nullstellen muss man nicht rechnen, sondern nur die Vorzeichen der Zahlen in den Klammern („in den Linearfaktoren“) ändern. Nullstellen liegen bei $x = \underline{\underline{-2}}$ und bei $x = \underline{\underline{5}}$ vor.
2	Gegeben ist f mit $f(x) = (x + 5)(x + 2)(x - 5)$; $x \in IR$. Bringen Sie f auf Normalform und geben Sie die Achsenschnittpunkte an.	Schritt für Schritt vorgehen: erst zwei Klammern ausmultiplizieren, danach die dritte dazu nehmen. Ergebnis: $f(x) = \underline{\underline{x^3 + 2 \cdot x^2 - 25 \cdot x - 50}}$. Das ist die Normalform. Für die Achsenschnittpunkte muss man nicht rechnen: $\underline{S_y(0 ; -50), S_{x1}(-5 ; 0), S_{x2}(-2 ; 0), S_{x3}(5 ; 0)}$
3	Gegeben ist f mit $f(x) = -2 \cdot (x + 1)(x^2 + 2 \cdot x - 4)$; $x \in IR$. Bringen Sie f auf Normalform und berechnen Sie die Nullstellen.	$f(x) =$ $\underline{\underline{-2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8}}$ Nullstellen: $x + 1 = 0$ oder $x^2 + 2 \cdot x - 4 = 0$ (quadr. Erg.)

		$x = -1$ oder $x^2 + 2 \cdot x + 1 = 4 + 1$ $x = -1 \vee (x + 1)^2 = 5$ $x = -1 \vee x + 1 = \sqrt{5}$
4	Gegeben ist f mit $f(x) = -5 \cdot (x + 6)(x - 5)(x - 7)$; $x \in \mathbb{R}$. Bringen Sie f auf Normalform.	$f(x) = -5 \cdot x^3 + 30 \cdot x^2 + 185 \cdot x - 1050$
5	Lösen Sie die Gleichung $-6 \cdot x^2 - 54 \cdot x - 122 = 0$.	quadratische Ergänzung: $x = -5 \vee x = -4$
6	Lösen Sie die Gleichung $-6x(x - 5) = 0$.	Auf Grund des Satzes vom Nullprodukt ergibt sich ohne Rechnung: $x = 0 \vee x = 5$
7	Lösen Sie die Gleichung $-2x^2 + 6x = 0$.	Durch Ausklammern sieht man schnell: $x = 0 \vee x = 3$
8	Lösen Sie die Gleichung $5 \cdot x^2 - 125 = 0$.	$x = -5 \vee x = 5$
9	Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 10 \cdot x + 10$. Welche Zahlen kommen als mögliche ganzzahlige Nullstellen von f in Frage?	Die Teiler der 10 und ihre Negativen: 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10
10	Führen Sie die folgende Polynomdivision durch [oder ermitteln Sie den quadratischen Term, der sich ergibt, wenn man -4 in das Horner-Schema der angegebenen Funktion einsetzt]: $(x^3 + x^2 - 10 \cdot x + 8) : (x + 4)$	$x^2 - 3 \cdot x + 2$
11	Führen Sie die folgende Polynomdivision durch [oder ermitteln Sie den quadratischen Term, der sich ergibt, wenn man 5 in das Horner-Schema der angegebenen Funktion einsetzt]: $(-2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 - 38 \cdot x - 60) : (x - 5)$	$-2 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 12$
	Nullstellen und Achsenschnittpunkte	
12	Wie viele Nullstellen kann eine kubische Funktion (Grad 3) haben?	1, 2 oder 3
13	Geben Sie die Nullstellen von f an mit	$x = -5 \vee x = 5 \vee x = 6$

$f(x) = -(x-6)(x+5)(x-5)$; $x \in \mathbb{R}$.	
14 Berechnen Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = -2 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 12 \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$.	-6; 0; 1
15 Berechnen Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = -2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$	0 (doppelt); 6
16 Gegeben ist f mit $f(x) = 4(x+3)(x+5)(x+1)$; $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.	$S_y(0; 60)$, da $f(0) = 60$
17 Gegeben ist f mit $f(x) = -3 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 81 \cdot x + 270$; $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.	$S_y(0; 270)$, da $f(0) = 270$
18 Berechnen Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x - 80.$; $x \in \mathbb{R}$ Tipp: Eine Nullstelle ist 4	-4; 1; 4
19 Berechnen Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = -4 \cdot x^3 - 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 296$; $x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 2	2
Ableitungen, Extrema und Sattelstellen bzw. Sattelpunkte	
20 Leiten Sie die Funktion f ab mit $f(x) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4$; $x \in \mathbb{R}$.	$f'(x) = \underline{6 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3}$
21 $f(x) = -7 \cdot x^5 - 5 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1$; $x \in \mathbb{R}$. Was ist dann $f'(x)$?	$f'(x) = \underline{\underline{-35 \cdot x^4 - 20 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 7}}$
22 $f(x) = (-5 \cdot x - 2) \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die erste Ableitung.	Zuerst die Klammern auflösen: $f(x) = -5 \cdot x^2 - 2 \cdot x$ $f'(x) = \underline{-10 \cdot x - 2}$
23 Bilden Sie die Ableitung von f mit $f(x) = 2 \cdot x^4 + x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2$; $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine andere Funktion an, die die selbe Ableitungsfunktion hat.	$f'(x) = 8 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 4$ z.B. k mit $k(x) = = 2 \cdot x^4 + x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 52$ hat dieselbe Ableitung.
24 Was ist die notwendige Bedingung dafür, dass x eine Extremstelle von f ist?	

A) f (x) = 0	FALSCH
B) f ´ (x) = 0	WAHR
C) f ´´ (x) = 0	FALSCH
D) f ´ (x) = 0 und f ´´ (x) $\neq$ 0	FALSCH
E) f ´ (x) = 0 oder f ´´ (x) $\neq$ 0	FALSCH
F) f ´ (x) = f ´´ (x)	FALSCH
25 f (x) = $5 \cdot x^3 + 97{,}5 \cdot x^2 + 630 \cdot x - 2$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrem- bzw. Sattelstellen.	Extremstellen -6; -7
26 f (x) = $2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 3$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrem- bzw. Sattelstellen.	Sattelstelle x = -1
27 f (x) = $x^3 + 16{,}5 \cdot x^2 + 90 \cdot x + 6$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrem- bzw. Sattelpunkte.	Extrempunkte: (-5 ; -156,5) ; (-6 ; -156)
28 f (x) = $x^3 - 21 \cdot x^2 + 147 \cdot x + 4$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrem- bzw. Sattelpunkte.	Sattelpunkt (7 ; 347)
29 Berechnen Sie die Extrem- bzw. Sattelstellen von f mit f (x) = $- 0{,}75 \cdot x^4 - 7{,}5 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 - 16{,}5 \cdot x + 4$; $x \in \mathbb{R}$. Tipp: bei x = -1 hat f eine waagerechte Tangente.	-5,5; -1
30 f (x) = a x^3 + b x^2 + c x + d; wobei a, b, c, d beliebige Zahlen sind. Welche Gleichung ergibt sich damit für die Ableitung von f?	f ´(x) = 3a x^2 + 2b x + c
Wendestellen und –punkte	
31 Was ist ein hinreichendes Kriterium dafür, dass x eine Wendestelle von f ist?	
A) f´ (x) = 0 und f´´ (x) = 0	FALSCH
B) f ´ (x) = 0 oder f´´´ (x) $\neq$ 0	FALSCH
C) f ´´ (x) = 0 und f´´´ (x) $\neq$ 0	WAHR

D) f ´ (x) = 0 und f ´ wechselt an der Stelle x das Vorzeichen	WAHR
E) f ´ (x) = 0 und f ´´ wechselt an der Stelle x das Vorzeichen	FALSCH
F) f ´ (x) = f ´´ (x)	FALSCH
32 $f(x) = -2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 5$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wendepunkt.	$f'(x) = -6 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 6$ $f''(x) = -12 \cdot x + 12$ $f'''(x) = -12$ notw.Bed.: $f''(x) = 0$ $-12 \cdot x + 12 = 0$ x = 1 (einzige mögliche Wendestelle) hinr. Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x)$ ungleich 0 $f'''(1) = -12$ ungleich 0, also ist x=1 eine Wendetelle. $f(1) = -7$ Wendepunkt W(1 ; -7)
33 $f(x) = -4 \cdot x^3 + 84 \cdot x^2 - 588 \cdot x - 5$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wendepunkt.	Wendepunkt W(7 ; -1377)
34 $f(x) = -6 \cdot x^3 + 63 \cdot x^2 - 216 \cdot x - 3$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wendepunkt.	Wendepunkt W(3,5 ; -244,5)
35 $f(x) = -5 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 2$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wendepunkt.	Wendepunkt W(1 ; -7)
36 $f(x) = -7 \cdot x^3 + 42 \cdot x^2 - 84 \cdot x + 6$; $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie auf Wendepunkte.	Wendepunkt W(2 ; -50)
Gemischte Aufgaben	
37 Berechnen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Sattelstellen von f mit $f(x) = -6 \cdot x^3 + 90 \cdot x^2 - 378 \cdot x - 3336$; $x \in \mathbb{R}$.	Nullstelle(n): -4; Extremstelle(n): 3; 7; Sattelstelle(n): keine
38 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 - 22{,}5 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 247{,}5$; $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an. Tipp: Eine Nullstelle ist –3	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 247,5); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (-4,9 ; 0); (-3 ; 0); (3,4 ; 0); Extrempunkt(e): (-4 ; -32,5); (1 ; 280); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt(e): (-1,5 ; 123,8)

39 $f(x) = -5 \cdot x^2 + 5;\ x \in \mathbb{R}$. An welcher Stelle hat f die Steigung -50?	5
40 $f(x) = -7 \cdot x^3 + 188 \cdot x + 4;\ x \in \mathbb{R}$. An welchen Stellen hat f die Steigung -1?	3; -3
41 $f(x) = -6 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6;\ x \in \mathbb{R}$. Welche Steigung hat f an der Stelle x = -6 ?	$f'(-6) = -715$
42 $f(x) = -x^2 + 5 \cdot x - 3;\ x \in \mathbb{R}$. t_{-1} ist die Tangente von f an der Stelle -1. Geben Sie die Gleichung von t_{-1} an.	$t_{-1}(x) = 7 \cdot x - 2$
43 $f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 3;\ x \in \mathbb{R}$. t_3 ist die Tangente von f an der Stelle 3. Welche Steigung hat t_3 ?	$f'(3) = 1$
44 $f(x) = 4 \cdot x^5 - 6 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1;$ $x \in \mathbb{R}$. Welche Steigung hat f an der Stelle x = -1 ?	$f'(-1) = 30$
45 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem- und Sattelpunkte an von f mit $f(x) = -6 \cdot x^3 - 153 \cdot x^2 - 1188 \cdot x - 2688;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist –4	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; -2688); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (-12,6 ; -7,2); (-8,9 ; -4,1); (-4 ; 0); Extrempunkt(e): (-11 ; -147); (-6 ; 228); Sattelpunkt(e): keine
46 $f(x) = -6 \cdot x^2 - x;\ x \in \mathbb{R}$. Welche Steigung hat f an der Stelle 0?	$f'(0) = -1$
47 $f(x) = 2 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 4;\ x \in \mathbb{R}$. Welche Steigung hat f an der Stelle x = -3 ?	$f'(-3) = -330$

48 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 + 13{,}5 \cdot x^2 - 36 \cdot x - 94{,}5;\ x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an. Tipp: Eine Nullstelle ist 3	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; -94,5); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (-5,6 ; 3,612009); (-1,9 ; 2,057999); (3 ; 0); Extrempunkt(e): (-4 ; 73,5); (1 ; -114); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt: (-1,5 ; -20,25)
49 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -4 \cdot x^3 + 102 \cdot x^2 - 792 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 0	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (0 ; 0); Extrempunkt(e): (6 ; -1944); (11 ; -1694); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt: (8,5 ; -1819)
50 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2;\ x \in \mathbb{R}$ Tipp: Eine Nullstelle ist –2	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (-2 ; 0); (0 ; 0); Extrempunkt(e): (-1,3 ; 3,549); (0 ; 0); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt: (-0,7 ; 1,911)
51 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 - 75 \cdot x^2 - 375 \cdot x + 8015;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 7	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 8015); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (7 ; 0); Extrempunkt(e): keine; Sattelpunkt(e): (-5 ; 8640); Wendepunkt: (-5 ; 8640) (Es gilt: Jeder Sattelpunkt ist zugleich ein Wendepunkt.)
52 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem- und Sattelpunkte an von f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 - 22{,}5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 57{,}5;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 1	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 57,5); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse:

	(1 ; 0); Extrempunkt(e): (-2 ; 67,5); (-1 ; 70); Sattelpunkt(e): keine
53 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -5 \cdot x^3 + 52{,}5 \cdot x^2 - 180 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (0 ; 0); Extrempunkt(e): (3 ; -202,5); (4 ; -200); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt(e): (3,5 ; -201,25)
54 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 16{,}5 \cdot x^2 - 72 \cdot x + 86;\ x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an. Tipp: Eine Nullstelle ist 2	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 86); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (2 ; 0); (4,2 ; 0); (10,3 ; 0); Extrempunkt(e): (3 ; -8,5); (8 ; 54); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt(e): (5,5 ; 22,75)
55 Berechnen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Sattelstellen von f mit $f(x) = -x^3 - 6 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 8;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist -2	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; -8); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (-2 ; 0); Extrempunkt(e): keine; Sattelpunkt(e): (-2 ; 0)
56 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot x^3 + 42 \cdot x^2 + 72 \cdot x - 702;\ x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an. Tipp: Eine Nullstelle ist 3.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; -702); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (3 ; 0); Extrempunkt(e): (-6 ; -486); (-1 ; -736); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt(e): (-3,5 ; -611)
57 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -6 \cdot x^3 + 36 \cdot x^2;\ x \in \mathbb{R}$ Tipp: Eine Nullstelle ist 6.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (0 ; 0); (6 ; 0); Extrempunkt(e): (0 ; 0); (4 ; 192); Sattelpunkt(e): keine; Wendepunkt(e): (2 ; 96)

58 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -2 \cdot x^3 + 18 \cdot x^2 - 54 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (0 ; 0); Extrempunkt(e): keine; Sattelpunkt(e): (3 ; -54); Wendepunkt(e): (3 ; -54)
59 Berechnen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Sattelstellen von f mit $f(x) = -3 \cdot x^3 + 63 \cdot x^2 - 441 \cdot x + 1029;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 7.	Nullstelle(n): 7; Extremstelle(n): keine; Sattelstelle(n): 7
60 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem- und Sattelpunkte an von f mit $f(x) = -x^3 - 9 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 684;\ x \in \mathbb{R}$. Tipp: Eine Nullstelle ist 6.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 684); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (6 ; 0); Extrempunkt(e): (-4 ; 700); (-2 ; 704); Sattelpunkt(e): keine
61 Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte, Extrem-, Sattel- und Wendepunkte an von f mit $f(x) = -x^3 - 18 \cdot x^2 - 108 \cdot x;\ x \in \mathbb{R}$.	Schnittpunkt mit der y-Achse: (0 ; 0); Schnittpunkt(e) mit der x-Achse: (0 ; 0); Extrempunkt(e): keine; Sattelpunkt(e): (-6 ; 216); Wendepunkt(e): (-6 ; 216)