LORE LORENTZ SCHULE

Basistext: Gleichungen lösen – händisch

Übungen zu diesem Basistest finden sich in der Datei: ab_gleichungen.pdf

Gleichungen sind in der Mathematik etwas ganz Zentrales. Entsprechend wichtig ist es, über das Handwerkszeug zu verfügen, mit dem man Gleichungen lösen kann.

Was versteht man unter der Lösung einer Gleichung?

Es geht darum, die Lösungen der Gleichung zu ermitteln, das heißt, diejenigen Zahlen, die die Gleichung erfüllen.

z.B. erfüllt **3** die Gleichung $4x^2+20x-74=22$, denn wenn man in die linke Seite $x=3$ einsetzt, so erhält man $4 \cdot \mathbf{9}+20 \cdot \mathbf{3}-74=22$,

also ist $x=3$ eine Lösung dieser Gleichung.

(Dabei haben wir bisher noch nicht gezeigt, wie man diese Lösung findet, sondern nur, wie man überprüft, ob eine Zahl eine Lösung ist-das nennt man „die Probe machen“.)

Allerdings ist die Gleichung damit nicht ganz gelöst: 3 ist nämlich nicht die *einzige* Lösung.

Setzt man in die linke Seite der Gleichung x=**-8** ein, so erhält man:

$4 \cdot \mathbf{64}+20 \cdot (\mathbf{-8})-74=22$.

Somit ist $x=-8$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung.

Häufig ist von einer Lösungsmenge die Rede. Das wäre dann in diesem Fall $\mathbb{L}=\{-8\,;3\}$

- Was anhand dieses Beispiels deutlich werden sollte:
  Eine Gleichung ist alles, was zwei mathematische Ausdrücke durch ein Gleichheitszeichen verbindet.
- Eine solche Gleichung kann *eine* oder *mehrere* oder auch *gar keine* Lösung haben. Daraufhin muss man sie eben untersuchen.

Leider gibt es keinen „Universalschlüssel“, mit dem man *jeder* Gleichung zu Leibe rücken kann und der dann exakte Lösungen liefert. Je nach Art der Gleichung bieten sich unterschiedliche Verfahren an.

Zu beachten ist dabei, dass sich eine Gleichung wie eine Waage im Gleichgewicht verhält: Alles, was man mit der einen Seite der Gleichung nacht, muss man auch mit der anderen Seite machen, sonst bleibt die Waage nicht im Gleichgewicht – bei der Gleichung würde das bedeuten, dass die Lösungen verfälscht werden.
Erläuterungen dazu, worum es beim Lösen einer Gleichung geht.

Folgende Schritte sind durchzuführen:

- **Gleichung aufstellen** (z.B. bei der Aufgabe: Berechne die Nullstelle von …. Schreibt man …=0. (Selbst wenn man dann nicht weiter weiß, hat man damit schon einmal gezeigt: man weiß, was eine Nullstelle ist.);
- Um die **Variable x** zu **isolieren** (alleine auf einer Seite zu bringen), wendet man Schritt für Schritt entsprechende Rechenoperationen auf die Gleichung an (Wichtig: immer auf **beide Seiten** der Gleichung!);
- **Probe** durch Einsetzen des Ergebnisses in die Ausgangsgleichung (wenn noch Zeit ist);
- Um die Lehrerin oder den Lehrer zu erfreuen: Ergebnis **doppelt unterstreichen**; bei Textaufgaben **Lösungssatz** nicht vergessen.

Lösen linearer Gleichungen

Lineare Gleichungen zu lösen ist nicht schwer. Häufig geht es darum, eine Gleichung der Form $m \cdot x + b = 0$ zu lösen (z.B., um die Nullstelle einer linearen Funktion zu berechnen. Dazu reicht aus, zu subtrahieren (abzuziehen) und danach zu teilen.

-14x– 49=0	|+49	
⇔ -14x=49	| : (-14)	
⇔ x=-3,5		
Probe: -14 · (-3,5) – 49=0;	*richtig*	

Wenn auf der rechten Seite der Gleichung nicht Null steht, sondern ein anderer (höchstens linearer) Ausdruck, ist das schnell in den Griff zu kriegen:
Man kann die rechte Seite von der gesamten Gleichung abzeihen und erhält eine Gleichung bei der nun doch rechts die gewünschte Null erscheint:

-14 x – 49=8 x – 5	|-(8 x – 5)	Die Klammer ist wichtig: Letztendlich muss man –(-5) rechnen, also +5
⇔ -22 x -44=0	…	… nun geht das Verfahren weiter wie oben, als Lösung erhält man $x = -2$

Wenn du üben möchtest: ab_lineare_gleichungen.pdf, ab_lineare_gleichungen_und_funktionen.pdf

weitere Links zum Thema lineare Gleichungen
weitere Links zum Thema lineare Funktionen

Lösen einer quadratischen Gleichung

Für das Lösen einer quadratischen Gleichung (bei der auf einer Seite Null steht) gibt es eine Reihe von Sonderfällen.
Im Regelfall kommt man aber zurecht, wenn man einen der beiden „Universal-schlüssel“ kennt: das Verfahren der quadratischen Ergänzung oder die p-q-Formel. Beide beruhen auf den binomischen Formeln.

Im Folgenden werden auch die unterschiedlichen Sonderfälle durchgegangen. Wenn du dir diese Fälle anschaust, kommst du vielleicht hinter ein paar Tricks und lernst Abkürzungen kennen, die dir auch an anderer Stelle nützlich sein können.

Sonderfall: Faktorisierte Form: **$a\,(x - x_1)\cdot(x - x_2)=0$**		**Verfahren: Satz vom Nullprodukt; ACHTUNG: geht *nicht* bei $a\,(x - x_1)(x - x_2)=b \neq 0$**
$4\,(x+3)\cdot(x - 12)=0$ $\Leftrightarrow x=\underline{\underline{-3}} \vee x=\underline{\underline{12}}$		Aus dem Satz vom Nullprodukt folgt: Ändert man bei den Summanden in den Klammern das Vorzeichen, so hat man die Nullstellen.
Probe: $4\,(-3+3)\,(-3 - 12)=0$ und $4\,(12+3)\,(12 - 12)=0$; richtig		

Sonderfall: **lineares Glied fehlt: $a\,x^2+c=0$**		
$3\,x^2 - 12=0$	$\mid :3$	Normieren, so dass vor dem x^2 kein Faktor mehr steht;
$\Leftrightarrow x^2 - 4=0$	$\mid +4$	
$\Leftrightarrow x^2=4$	$\mid \pm\sqrt{\ }$	Beachte: Zwei Lösungen, wenn die Zahl rechts vom „=“ pos. ist;
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{-2}} \vee x=\underline{\underline{2}}$		keine,wenn sie neg. ist, und eine, wenn sie 0 ist.
Probe: $3\cdot(-2)^2 - 12=0$ und $3\cdot 2^2 - 12=0$; richtig		

Sonderfall: **konstantes Glied fehlt: $a\,x^2+bx=0$**		**Verfahren:** Ausklammern ist nur sinnvoll, wenn der y-Achsenabschnitt Null ist
$-0{,}5\,x^2 - 11\,x=0$	$\mid :(-0{,}5)$, d.h. $\cdot(-2)$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^2+22\,x=0$		x Ausklammern;
$\Leftrightarrow x\,(x+22)=0$		Satz vom Nullprodukt;
$\Leftrightarrow x=0 \vee x+22=0$	$\mid -22$ (rechte Gleichung)	Lösen der linearen Gleichung.
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{0}} \vee x=\underline{\underline{-22}}$		
Probe: $-0{,}5\cdot 0^2 - 11\cdot 0=0$ und $-0{,}5\cdot(-22)^2 - 11\cdot(-22)=0$; richtig		

Normalfall: **Normalform:** **$a x^2+b x+c=0$**		**Verfahren: quadratische Ergänzung (oder p-q-Formel)**
$-2 x^2+14 x - 24=0$	$\mid : (-2)$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^2 - 7 x+12=0$	$\mid - 12$	
$\Leftrightarrow x^2 - 7 x=-12$	$\mid + \left(-\frac{7}{2}\right)^2$; also +12,25	quadratische Ergänzung;
$\Leftrightarrow x^2 - 7 x+12{,}25 =-12+ 12{,}25$		binomische Formel;
$\Leftrightarrow (x - 3{,}5)^2=0{,}25$	$\mid \pm\sqrt{}$	Beachte: Zwei Lösungen, wenn die Zahl rechts vom „=“ pos. ist,
$\Leftrightarrow x - 3{,}5=-0{,}5 \vee x - 3{,}5=0{,}5$	$\mid +3{,}5$	Lösung der linearen Gleichungen
$\Leftrightarrow x=\underline{3} \vee x=\underline{4}$		
Probe: $-2 \cdot 3^2+14 \cdot 3 - 24=0$ und $-2 \cdot 4^2+14 \cdot 4 - 24=0$; richtig		

Quadratische Funktionen

weitere Links zum Thema quadratische Gleichungen

Lösen einer kubischen Gleichung (Gleichung 3. Grades)

Mit dem Lösen solcher Gleichungen (man nennt sie auch kubisch) stoßen wir in den Bereich der Oberstufenmathematik vor.
Formelmäßige Verfahren (vergleichbar zur p-q-Formel oder der quadratischen Ergänzung) sind nun nicht mehr sehr hilfreich – zwar hat es mal jemand in der frühen Neuzeit geschafft, eine entsprechende Formel zu entwickeln, die benutzt aber viele Fallunterscheidungen und ist viel zu kompliziert.
Abgesen von den Sonderfällen, in denen sich ein anderer Lösungsweg anbietet, müssen wir erst einmal eine Lösung der Gleichung „finden“ (durch Probieren, Durchsehen einer Wertetabelle, Suchen am Funktionsgraph).
Danach haben wir mit der Polynomdivision oder dem Horner-Schema wieder Standardverfahren und dann der quadratischen Ergänzung für die exakte Berechnung etwaiger weiterer Lösungen zur Verfügung.

Sonderfall: **Faktorisierte Form**: **$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$**		**Verfahren:** Satz vom Nullprodukt
$-4(x+9)(x-1{,}5)(x-2)=0$		
$\Leftrightarrow x=\underline{-9} \vee x=\underline{1{,}5} \vee x=\underline{2}$		
Probe: $-4(-9+9)(-9-1{,}5)(-9-2)=0$; $-4(1{,}5+9)(1{,}5-1{,}5)(1{,}5-2)=0$ u. $-4(2+9)(2-1{,}5)(2-2)=0$ richtig		

Sonderfall: **quadratisches und lineares Glied fehlen: $ax^3+d=0$**		**Verfahren: Dritte Wurzel ziehen**
$2x^3+54=0$	$\mid :2$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^3+27=0$	$\mid -27$	
$\Leftrightarrow x^3=-27$	$\mid \sqrt[3]{\ }$	Beachte: immer genau eine Lösung;
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{3}}$		diesmal kein „±“.
Probe: $2\cdot 3^3+54=0$		

Sonderfall: **konstantes Glied fehlt: $ax^3+bx^2+cx=0$**		**Verfahren:** **Ausklammern** (dann Satz vom Nullprodukt und quadratische Ergänzung)
$0{,}2x^3-1{,}4x^2+2{,}4x=0$	$\mid :(0{,}2)$, d.h. $\cdot 5$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^3-7x^2+12x=0$		x Ausklammern;
$\Leftrightarrow x(x^2-7x+12)=0$		Satz vom Nullprodukt;
$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-7x+12=0$		weiter: siehe : „Lösen quadratischer Gleichungen“.
$\Leftrightarrow x=0 \vee \ldots$	$\mid \ldots$	
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{0}} \vee x=\underline{\underline{3}} \vee x=\underline{\underline{4}}$		
Probe: *$0{,}2\cdot 0^3-1{,}4\cdot 0^2+2{,}4\cdot 0=0$; $0{,}2\cdot 3^3-1{,}4\cdot 3^2+2{,}4\cdot 3=0$ und $0{,}2\cdot 4^3-1{,}4\cdot 4^2+2{,}4\cdot 4=0$; richtig*		

Sonderfall: **lin. und konstantes Glied fehlen: $ax^3+bx^2=0$**		**Verfahren:** **Ausklammern**
$0{,}2x^3-1{,}4x^2=0$	$\mid :(0{,}2)$, d.h. $\cdot 5$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^3-7x^2=0$		x^2 ausklammern;
$\Leftrightarrow x^2(x-7)=0$		Satz vom Nullprodukt;
$\Leftrightarrow x^2=0 \vee x-7=0$		

⇔ x=0 ∨ x=7		Bem.: bei $x=0$ liegt eine doppelte Nullstelle vor.
Probe: *0,2·0 ^{3} – 1,4·0 ^{2}=0 und 0,2·7 ^{3} –1,4·7 ^{2}=0; richtig*		

Normalform: **a x ^{3}+b x^2 +c x+d=0**		**Verfahren:** Horner-Schema **(oder Polynom-Division), hier wird das etwas schnellere Horner-Schema vorgeführt.** **Achtung: Durch Einsatz leistungsfähigerer Geräte (Taschenrechner bzw. CAS) verliert das Verfahren an Bedeutung: Bei vielen Schulen wird es nicht mehr (intensiv unterrichtet)**
-2 x ^{3}+10 x ^{2} +24 x – 72=0		mögliche ganzzahlige Nullstellen: die Teiler von 72 u. ihre Negativen
mögliche Nullstellen: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 8; -8; 9; -9; 12; -12; 18; -18; 24; -24; 36; -36; 72, -72		systematisches Probieren: nacheinander (beginnend mit den einfachen!) ins Horner-Schema einsetzen; (alternativ: Polynomdivision)

Koeff. x	-2	10	24	-72	
					Koeffizienten -2 x ^{3}+10 x ^{2} +24 x – 72 eintragen
$x=1$	-2	8	32	-40	1. Spalte: Leitkoeffizient eintragen, dann
$x=-1$	-2	12	12	-84	mit x multiplizieren, Ergebnis mit
$x=2$	-2	6	36	0	nächstem Koeffizienten addieren ...

-2 x ^{2}+6 x+36=0		Aus Zwischenwerten Gleichung entnehmen . . .
-2 x ^{2}+6 x+36=0 | :(-2) ⇔ x ^{2} – 3 x – 18=0 | +18+(3/2)² ⇔ x ^{2} – 3 x +2,25=18+2,25 ⇔ (x – 1,5) ^{2}=20,25 | √ ⇔ x – 1,5=4,5 ∨ x – 1,5=-4,5 ⇔ x=-3 ∨ x=6		. . . und lösen der entstandenen quadratischen Gleichung
Nullstellen: x=2 ∨ x=-3 ∨ x=6		Achtung: Zuerst gefundene Nullstelle nicht vergessen!
Probe: *-2·2^3+10·2^2+ 24·2– 72=0; -2·(-3)^3+10·(-3)^2+ 24·(-3)– 72=0 und -2·6^3+10·6^2+ 24·6–72=0; richtig*		

zum Horner-Schema: horner-schema
zur Polynomdivision: Arndt Brünner (Aufgaben mit Lösungen werden automatische neu erzeugt)

andere Fälle: kreativ sein

Selbst ein umfangreiches Handbuch kann kaum alle Fälle ausführlich berücksichtigen.
Ist eine Gleichung zu lösen, auf die keiner der angegebenen Fälle genau passt, so schaut man, ob sich die Gleichung nicht entsprechend umwandeln lässt:

$7x+13=2(x+8)+1$		Klammer auflösen;
$\Leftrightarrow 7x+13=2x+16+1$		Zusammenfassen;
$\Leftrightarrow 7x+13=2x+17$	$\mid -2x-17$	
$\Leftrightarrow 5x-4=0$		Das ist ein bekannter Fall!
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{4/5}}$		
$1{,}7(2x+5)(x^3-x^2+x-1)=0$		Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow 2x+5=0 \vee x^3-x^2+x-1=0$		Das sind bekannte Fälle!
$\Leftrightarrow \ldots x=\underline{\underline{-\frac{5}{2}}} \vee x=\underline{\underline{1}}$ (dreifach)		
$2x^7-4x^6+3=3$	$\mid -3$	
$\Leftrightarrow 2x^7-4x^6=0$	$\mid :2$	Normieren;
$\Leftrightarrow x^7-2x^6=0$		x^6 ausklammern;
$\Leftrightarrow x^6(x-2)=0$		Satz vom Nullprodukt.
$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{0}}$ (sechsfach) $\vee x=\underline{\underline{2}}$		

Das Bestimmen von Nullstellen ist so ziemlich genau das selbe wie das Lösen einer Gleichung- nur das dann zunächst der Term einer Funktion gegeben ist und daraus die folgende Gleichung gemacht wird: $f(x)=0$.
Eine Übersicht über Nullstellenbestimmung gibt folgende Datei: http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/gkmathe/download/ana1.pdf

Exponentialgleichungen

Bei anderen Gleichungen braucht man andere Hilfsmittel:
In Exponentialgleichungen ist der Exponent zu bestimmen:
Als Exponentensuchmaschine dient der Logarithmus:

Exponentialgleichung – einfachste Form		**Verfahren: Logarithmieren**
$b^x = c$	$\mid \log_b$	Logarithmus zur Basis b;
$\Leftrightarrow x = \log_b(c) = \ln(c) / \ln(b)$		

Beispiel:

$5^x = 125$	$\mid \log_5$	Logarithmus zur Basis 5;
$\Leftrightarrow x = \log_5(125)$ $= \ln(125) / \ln(5) = 3$		(Okay, das hätte man auch im Kopf rauskriegen können.)
Probe: $5^3 = 125$ *richtig*		

Wesentlich praktischer ist die Lösung bei einer Gleichung der folgenden Form:

Exponentialgleichung – einfachste Form und Basis e		**Verfahren: Logarithmieren**
$e^x = c$	$\mid \ln$	Natürlicher Logarithmus (=Logarithmus zur Basis e s)
$\Leftrightarrow x = \ln(c)$		

Innermathematische Anwendungsfelder für das Lösen von Gleichungen

Fragestellung	Ansatz	weiterer nötiger Schritt
Nullstellenbestimmung	$f(x) = 0$	-
Schnittpunkt mit x-Achse	$f(x) = 0$	Den Punkt (x; 0) angeben.
Faktorisieren (Zerlegen eines Polynoms in Linearfaktoren)	$f(x) = 0$	die Linearfaktoren zu den gefundenen Nullstellen aufschreiben: z.B. Leitkoeffizient 7; Nullstellen –2 (einfach) und 6 (doppelt) $\Rightarrow$ $f(x)=7\,(x+2)\cdot(x-6)^2$ (bei einer Funktion f vom Grad 3).
Schnittpunkt der Graphen von f u. g	$f(x) = g(x)$	x in f einsetzen, um die y-Koordinate zu erhalten
An welchen Stellen nimmt f den Wert c an?	$f(x) = c$	-
An welcher Stelle hat f die Steigung c?	$f'(x) = c$	-
Untersuchung auf lokale Extremstellen	$f'(x) = 0$ (notw. Bed.)	Überprüfung des Vorzeichenwechselkriteriums oder der hinreichenden Bedingung! $f''(x) \neq 0$.
Untersuchung auf Wendestellen	$f''(x) = 0$ (notw. Bed.)	Überprüfung des Vorzeichenwechselkriteriums oder der hinreichenden Bedingung! $f'''(x) \neq 0$.

... zu guter Letzt: Nützliches nach dem Lösen einer Aufgabe.

Ja, ja, außer der wohlverdienten Freude nach getaner Arbeit sollten sich auch gut trainierte Aufgabenlöser/innen nicht allzu schnell zurücklehnen.
Besser ist es, die Lösung noch einmal kritisch zu überprüfen:

1)	Stimmt die Lösung?	D.h.: Probe machen (also zumeist in die entsprechende Gleichung oder die Gleichungen einsetzen. Beachte: immer in die Ausgangsgleichungen, nicht weil es bequemer ist, in bereits umgeformte Gleichungen.
2)	Passt die Lösung zur Aufgabe?	Manchmal überliest man einen Aufgabenteil, berechnet eine Steigung, wo eine Stelle gesucht ist. Öfter aber meint man, fertig zu sein, wenn die Nullstelle bestimmt ist, es war aber nach den Schnittpunkten mit den Achsen gefragt – also erstens nach Punkten statt den angegebenen Stellen und zweitens auch nach dem Schnittpunkt mit der y-Achse, mit dem die berechneten Nullstellen gar nichts zu tun haben.
3)	Passt die Lösung zu den Ergebnissen anderer Teilaufgabe?	Wenn z. B. eine ganzrationale Funktion zwei Hochpunkte hat, einen bei (2|1) und einen bei (4|-5), und nach unseren Berechnungen liegt die einzige Nullstelle bei 6 und ein Tiefpunkt existiert nicht, so sollte uns das zu denken geben . . . Spätestens, wenn ein Graph zu zeichnen ist, ergeben sich zahlreiche Möglichkeiten, die Ergebnisse zu kontrollieren.