LORE LORENTZ SCHULE

Quadratische Gleichungen händisch lösen (Basistext)

Mein Sohn war verzweifelt. Gerade hatte er erfolgreich 112 : 4 gerechnet, indem er die 112 erst durch 2 und das Ergebnis wieder durch 2 gerechnet hat.
Nun wollte er 180 : 6 rechnen, indem er erst durch 3 und dann nochmals durch 3 teilt. Er dachte, das mit der 4 klappt, weil 2+2=4 ist, also geht es entsprechend auch mit der 6, denn 3+3=6.
Ich erklärte ihm, dass dies eine Verwechslung ist, die dadurch zustande kommt, dass 4=2+2, aber gleichzeitig 4=2·2 ist – und das das eine Ausnahme ist.
„Also ist das bei keiner anderen Zahl so?“, fragte mein Sohn.
Wenn man sich das überlegt, führt das zu einer Gleichung: für welche Zahlen gilt:
$x + x = x \cdot x$ also $2x = x^2$

Zu Gleichungen allgemein siehe auch:	Basistext Gleichungen
Wozu?	Das Lösen quadratischer Gleichungen gehört in der Mathematik zum grundlegenden Handwerkszeug.
Beispiele für Anwendungen:	Man stößt auf quadratische Gleichungen, wenn man Nullstellen einer oder Schnittpunkte mehrerer quadratischer Funktionen (oder auch Funktionen höheren Grades) bestimmen will und ebenso bei Extremstellenbestimmung z.B. kubischer Funktionen. Als wirtschaftliche Anwendungen wären z.B. die Bestimmung der Gewinnzone im Fall eines Monopols zu nennen oder die Gewinnmaximierung im Falle einer Kostenfunktion vom Grad drei. Mehr dazu kann man im Basistext quadratische Funktionen nachlesen.
Lösungsansätze:	Das Lösen quadratischer Gleichungen klappt zwar nach "Schema F", wobei man sowohl das Verfahren der quadratischen Ergänzung verwenden kann als auch die p-q-Formel. Um ein besseres Verständnis für beide Verfahren und nicht zuletzt Sicherheit auch im Umgang mit Sonderfällen zu erwerben, ist es aber sinnvoll, sich zunächst mit gerade den einfacheren Fällen zu beschäftigen und an den allgemeinen Fall nach und nach heranzutasten.

Grundlagen	Um verstehen zu können, wie man quadratische Gleichungen löst, muss man sich einmal mit Umformungen beschäftigt haben, insbesondere mit dem Auflösen von Klammern und mit den binomischen Formeln.
Übungen zum Klammern auflösen	ab_klammern_auflösen_und_ausklammern.doc ab_terme_u_gleichungen_mit_klammern
Übungen zu binomischen Formeln	ab_binomische_formeln

Spezialfall 1: Die reinquadratische Gleichung:

$a_2 \cdot x^2 + a_0 = 0$,

wobei $a_2 \neq 0$

Beispiel 1:
$4x^2 - 36 = 0$

Die ersten beiden Lösungsschritte entsprechen denen bei einer linearen Gleichung:

$4x^2 - 36 = 0 \quad \mid :4$	**1. Schritt:** Teilen durch den Vorfaktor 4 (Das heißt jetzt großspurig „Normieren“):
$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \quad \mid +9$	**2. Schritt:** Isolieren des Terms x^2 (indem man den absoluten Term subtrahiert)
$\Leftrightarrow x^2 = 9 \quad \mid \pm\sqrt{}$	**3. Schritt:** Ziehen der Wurzel.
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-3}} \vee x = \underline{\underline{3}}$	💣 AN DIE NEGATIVE LÖSUNG DENKEN!
Bemerkung zur Schreibweise:	„$\vee$“ heißt „oder“.
Bemerkung:	Beim Quadrieren einer Zahl x „verschwindet“ deren Vorzeichen, d.h. das Quadrat einer positive Zahl ist positiv, das einer negativen aber auch, denn „Minus mal Minus ergibt Plus“. Daher hat die Gleichung $x^2 = 9$ zwei Lösungen – wer es nicht glaubt, mache die Probe.

Übungen:

Beispiel 2: $4x^2 + 36 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 36 = 0 : 4$	**1. Schritt:** Normieren
$\Leftrightarrow x^2 + 9 = 0 \quad \mid -9$	**2. Schritt:** Isolieren des Terms x^2 (indem man den absoluten Term subtrahiert)

$\Leftrightarrow x^2 = -9$ (unlösbar)	Diese Gleichung hat keine Lösung, denn x^2 kann nicht negativ sein, egal, was man für x einsetzt.

Die **Anzahl der Nullstellen** bei einer reinquadratischen Gleichung hängt davon ab, ob a und c dasselbe Vorzeichen haben oder nicht.

Wenn beide ein unterschiedliches Vorzeichen haben, hat die Gleichung zwei Lösungen.

Wenn beide das gleiche Vorzeichen haben, hat die Gleichung keine Lösung.

Spezialfall 2: Die quadratische Gleichung ohne absolute Glieder: $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x = 0$, wobei $a_2 \neq 0$

Beispiel 1: $4x^2 - 36x = 0$

$4x^2 - 36x = 0 \quad \mid :4$	**1. Schritt:** Teilen durch 4 („Normieren“):
$\Leftrightarrow x^2 - 9x = 0$	**2. Schritt:** Ausklammern (Achtung: nur machbar, weil das Absolutglied fehlt)
$\Leftrightarrow x(x-9) = 0$	**3. Schritt:** Ziehen der Wurzel.
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \vee x - 9 = 0$	Satz vom Nullprodukt anwenden
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \vee x = \underline{\underline{9}}$	„$\vee$“ heißt „oder“.
Bemerkung:	Man sieht, wie leicht Nullstellen einer quadratischen Funktion abzulesen sind, wenn diese als Produkt dargestellt ist (siehe "faktorisierte Form")

"Das Geschenk": Die faktorierte Form: $a_2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_0) = 0$

Beispiel 1: $4(x-8)(x+3) = 0$

$4(x-8)(x+3) = 0$	Satz vom Nullprodukt anwenden
$\Leftrightarrow 4 = 0 \vee x - 8 = 0 \vee x + 3 = 0$	Der Vorfaktor 4 kann nicht Null sein, also muss einer der beiden Linearfaktoren Null sein.
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{8}} \vee x = \underline{\underline{-3}}$	Man hätte die Nullstellen auch direkt an der faktorisierten Form ablesen können, indem man bei den Zahlen, die hinter dem x in den Linearfaktoren stehen, einfach das Vorzeichen ändert.

Übungen [quadratische_gleichungen_sonderfälle]

"Der Normalfall": Die quadratische Gleichung "mit allem": $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$,

wobei $a_2 \neq 0$

quadratische Ergänzung

Ein quadratischer Ausdruck lässt sich durch das passende Absolutglied im Sinne einer binomischen Formel ergänzen:

Vorausgesetzt, vor dem x^2 steht kein Faktor,

so betrachtet man den Faktor vor dem x, halbiert ihn und quadriert das Ergebnis.

Beispiel 1: $x^2 - 8x$	quadratische Ergänzung = $(-8/2)^2 = (-4)^2 = 16$.
Bedeutung:	$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

Diese quadratische Ergänzung verwendet man zur Lösung quadratischer Gleichungen:

Beispiel 2: $4x^2 - 16x - 20x = 0$

$4x^2 - 16x - 20 = 0 \quad \vert :4$	**1. Schritt:** Teilen durch 4 („Normieren“):
$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$	**2. Schritt:** absolutes Glied abziehen und quadratische Ergänzung
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9$	**3. Schritt:** Umformen mit Hilfe der binomischen Formel
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$	**4. Schritt:** Ziehen der positiven und der negativen Wurzel
$\Leftrightarrow x - 2 = 3 \vee x - 2 = -3$	**5. Schritt:** Auflösen nach x
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{5}} \vee x = \underline{\underline{-1}}$	

Mehr dazu: Links quadratische Gleichungen