

Basistext: quadratische Gleichungen und quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen spielen in vielen Situationen eine Rolle. Einiges dazu kann man im [Basistext quadratische Funktionen](#) nachlesen.

Ein wesentliches Mittel zu Lösung aller derartigen Gleichungen bietet die quadratische Ergänzung.

Eine quadratische Gleichung kann in verschiedenen Formen auftreten. Häufig sind Gleichungen zu lösen, die so aussehen:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

z.B. $2 x^2 + 12 x + 10 = 0$

Eine solche Gleichung erhält man z.B., wenn man die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = 2 x^2 + 12 x + 10$ berechnen will.

Es gibt auch andere quadratische Gleichungen,

z.B. $5 x^2 - 1 = 3 x^2 - 12 x - 11$, die auf den ersten Blick viel schwieriger wirken.

Mit einer solchen Gleichung hat man es z.B. zu tun, wenn man die Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen berechnen will – in diesem Fall geht es um den Graph der Funktion g mit $g(x) = 5 x^2 - 1$ und **den** der Funktion h mit $h(x) = 3 x^2 - 12 x - 11$.

Oft sehen diese Gleichungen aber nur komplizierter aus. Wenn man den rechten Ausdruck $(3 x^2 - 12 x - 11)$ auf beiden Seiten der Gleichung abzieht, erhält man:

$$5 x^2 - 1 - (3 x^2 - 12 x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 x^2 + 12 x + 10 = 0.$$

Wir landen also wieder bei derselben Gleichung wie oben und das „komplizierte Aussehen“ der zweiten Gleichung erweist sich als Show-Effekt, von dem man sich einfach nicht abschrecken lassen darf.

Zur Lösung quadratischer Gleichungen gibt es Standardverfahren, die immer funktionieren. Eines davon ist die quadratische Ergänzung.

Die quadratische Ergänzung soll hier anhand der Gleichung $2 x^2 + 12 x + 10 = 0$ erläutert werden.

Bevor man quadratisch ergänzen kann, teilt man beide Seiten zuerst durch den Vorfaktor, der vor x^2 steht (den sogenannten Leitkoeffizienten, das ist hier die **2**):



$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x^2 + 12x + 10 = 0 \quad | : 2 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{array}$$

Danach zieht man auf beiden Seiten das Absolutglied ab (in diesem Fall die 5)

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x = -5$$

Nun kommt die eigentliche quadratische Ergänzung: Man geht vom Vorfaktor von x aus (in diesem Fall 6).

Diese Zahl wird halbiert und quadriert (Man erhält $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$) und das Ergebnis wird auf beiden Seiten addiert.

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = -5 + 9 = 4$$

Laut binomischer Formel gilt: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Also können wir schreiben:

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4$$

Jetzt endlich können wir unser Hauptproblem beseitigen: das Quadrat.

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel: Wenn man $x + 3$ quadriert, ergibt das 4.

Nur zwei Zahlen ergeben 4, wenn man sie quadriert: $\sqrt{4} = 2$ und $-\sqrt{4} = -2$. Also kann $x + 3$ nur 2 oder -2 sein.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x + 3 = 2 \quad \vee \quad x + 3 = -2 \quad | - 3 \\ x = 2 - 3 = -1 \quad \vee \quad x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 2 - 3 = -1 \\ x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

Das sind die beiden Lösungen.

Die **Probe** erfolgt durch Einsetzen der Lösungen in die ursprüngliche Gleichung:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + 10 = 2 - 12 + 10 = 0 \quad \checkmark \\ 2 \cdot (-5)^2 + 12 \cdot (-5) + 10 = 50 - 60 + 10 = 0 \quad \checkmark \end{array}$$



Trainingslager quadratische Gleichungen

Fingerübungen zur Ermittlung der Zahl zur quadratischen Ergänzung:

- a) Geben Sie die quadratische Ergänzung an, also die Zahl, durch die folgenden Ausdruck entsprechend einer binomischen Formel ergänzt wird:

$$x^2 - 13x + \dots$$

$$(13/2)^2 = 42,25$$

- b) Geben Sie die quadratische Ergänzung an, also die Zahl, durch die folgenden Ausdruck entsprechend einer binomischen Formel ergänzt wird:

$$x^2 + 7x + \dots$$

$$(7/2)^2 = 12,25$$

- c) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen:

$$x^2 + 8x + \dots = (x + \dots)^2$$

Addiere $(8/2)^2 = 16$

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 8)^2$$

- d) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen:

$$x^2 - 14x + \dots = (x - \dots)^2$$

Addiere $(-14/2)^2 = 49$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

quadratischen Ergänzung:

- e) Lösen Sie die Gleichung
 $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0$

$$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 3 \vee x - 2 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{5} \vee x = \underline{-1}$$

- f) Lösen Sie die Gleichung
 $-x^2 - 5 \cdot x - 11 = -5$.

$$-x^2 - 5 \cdot x - 11 = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 \cdot x + 11 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 \cdot x + 6,25 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow (x + 2,5)^2 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow x + 2,5 = 0,5 \vee x + 2,5 = -0,5$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{-2} \vee x = \underline{-3}$$

- g) Berechnen Sie die Nullstellen von f mit
 $f(x) = -4 \cdot x^2 + 32 \cdot x - 64$.

$$-4 \cdot x^2 + 32 \cdot x - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 \cdot x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow x = \underline{4}$ (diesmal gibt es nur eine Nullstelle. Man nennt dies eine doppelte Nullstelle.)

- h) Lösen Sie die Gleichung
 $x^2 + x - 15 = -x$.

- i) Lösen Sie die Gleichung

$$4 \cdot x^2 + x + 6 = 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 4$$



- j) Lösen Sie die Gleichung
 $-4 \cdot x^2 + 11 \cdot x + 65 = 3 \cdot x + 5$.



Manchmal – in Sonderfällen - geht es ohne quadratische Ergänzung übrigens schneller und einfacher:

k) Lösen Sie die Gleichung
$$-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4 = -6 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4.$$

l) Lösen Sie die Gleichung
$$-2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 6 = -4 \cdot x + 6.$$

Mehr dazu:

[Links zu quadratischen Gleichungen](#)

[Basistext](#) quadratische Ergänzung, [Basistext](#) quadratische Gleichungen

Sehr ausführliches Leitprogramm zu quadratischen Gleichungen:

http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/quadr_gleich/index

Auch ein Teil von <http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/lqf/lqfindex.html> behandelt das Lösen quadratischer Gleichungen

[Links zu quadratischen Funktionen](#)

[Basistext](#) Quadratische Funktionen, [Übersicht](#), [Lückentext](#), [Aufgabentypen](#).

Selbsteinschätzungsbogen mit Aufgaben von klett

http://www.klett.de/web/uploads/pondus_datei/66a3d2ce83b84c76d9c2551ac7cc19e_dba32ccf7.pdf

Selbstlernmaterial: <http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1fu/qf/qfindex.html>

Viele ausführlich vorgerechnete Übungsaufgaben aus allen Bereichen (darunter auch einige ökonomische Anwendungen) <http://www.aj-dons.de/Mathe/doklaw2G.pdf>

Steckbriefaufgaben: [ab quadratische funktionen steckbrief](#)

Übungsaufgaben ökonomische Anwendungen:

[ab quadratische funktionen oekonomische anwendungen.pdf](#).

