

Basistext: Umkehrfunktion

Eine Funktion beschreibt einen Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y .

Um z.B. aus einer Temperaturangabe in Grad Celsius die entsprechende Angabe in Grad Fahrenheit zu berechnen, kann man die Funktionsgleichung $f(x) = 1,8x + 32$ verwenden.

Will man auch für die Umrechnung „in die andere Richtung“ (also vom bisherigen y zum bisherigen x) eine Funktion verwenden, so benötigt man die Umkehrfunktion von f .

Bezeichnung: f^{-1} , sprich: „f hoch minus Eins“ (manchmal auch: \bar{f} , sprich: „f quer“).

Führt man also f und f^{-1} hintereinander aus, so „landet man“ wieder bei derselben Zahl x , die man zuerst eingesetzt hat.

(Wer sich gerne in mathematischer Formelsprache ausdrückt, schreibt das so:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D(f)$$

Aus der Vertauschung von x und y ergibt sich auch eine Vertauschung von

Definitions- und Wertemenge,

d.h.: $D(f^{-1}) = W(f)$ und

Beispiel 1: $f(x) = -2x + 3$, $D(f) = [-4; 8]$, dann ist

$$x = -2 \cdot f^{-1}(x) + 3 \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -2 \cdot \bar{f}(x) \quad | :(-2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = f^{-1}(x).$$

Um die Wertemenge $W(f)$ zu bestimmen, ermittelt man den tiefsten und den höchsten Punkt auf dem Graph, indem man erst -4 und dann 8 einsetzt:

$$f(-4) = 11, f(8) = -13, \text{ also ist } W(f) = [-13; 11].$$

$$\text{Demnach gilt: } D(\bar{f}) = W(f) = [-13; 11]$$

$$W(f^{-1}) = D(f) = [-4; 8]$$

Einige Umkehrfunktionen:

$f(x)$	$D(f)$	$f^{-1}(x)$	$D(f^{-1}) = W(f)$
x	\mathbb{R}	x	\mathbb{R}
$m \cdot x$, wobei $m \neq 0$	\mathbb{R}	$\frac{1}{m}x$	\mathbb{R}
$m \cdot x + b$, wobei $m \neq 0$	\mathbb{R}	$\frac{1}{m}(x - b)$	\mathbb{R}
x^2	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	\sqrt{x}	$\mathbb{R}_{\geq 0}$



$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	\mathbb{R}	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_{>0}$

Graphisch: Der Graph der Umkehrfunktion ist gegenüber dem der ursprünglichen Funktion an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt, denn: Der Vertauschung von x und y in der Rechnung (s.o.) entspricht graphisch die Vertauschung von x - und y -Achse.



Aufgaben

1 Bestimme die Umkehrfunktionen zu folgenden Funktionen

$$f_1: y = 0,5x + 4; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3} \cdot (x-6); \quad D(f_2) = \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{10}x - 5; \quad D(f_3) = [0; 6]$$

$$f_4(x) = \sqrt{x}; \quad x \geq 0$$

2 Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, die durch P_1 und P_2 verläuft, sowie die Gleichung ihrer Umkehrfunktion. $P_1(-2 | 4)$, $P_2(6 | -4)$

