Finanzmathematik

Zinseszinsrechnung
Fundamentale Regel der Finanzmathematik
Barwert (Zinseszinsrechnung)

1 Zinseszinsrechnung

In der Finanzmathematik geht es um die Entwicklung des Werts von Geldbeträgen wie etwa eines Guthabens, der sich durch Verzinsung und/oder weitere Einzahlungen oder Abbuchungen verändert.
Dabei wird von einem stabilen Zinssatz p ausgegangen und entsprechend gefolgert, dass ein später gezahlter Geldbetrag weniger Wert ist als ein früher gezahlter Betrag gleicher Höhe, da der früher gezahlte entsprechende Zinsen und Zinseszinsen eingebracht hätte.

Ist der Zinssatz p gegeben, so ergibt sich daraus der Aufzinsungsfaktor q nach der Formel $q = 1 + \frac{p}{100}$.

a) Beispiel: p = 3,4, q = ……….. (als Kommazahl angeben)

Erklärung: wenn 3,4% dazugekommen sind, sind es insgesamt 103,4%. Da Prozent lediglich Hundertstel sind, ist q = ……….. (siehe oben).

b) Umgekehrt:

Bsp.1.: Wenn q = 1,062 ist, entspricht das einem Zinssatz von p = ……. %

Bsp.2: Wenn q = 1,26 ist, entspricht das einem Zinssatz von p = ……. %

Bsp.3: Bei einer Aktienanlage gilt: q = 2,41. Der entsprechende Zinssatz lautet p = ……. %

Für jeden Einzelbetrag erfolgt die Berechnung des Zeitwerts zu einem späteren Zeitpunkt durch Aufzinsen. Man zinst einen Geldbetrag K_0 um n Jahre auf, indem man ihn mit q^n multipliziert.

c) Ein Geldbetrag in Höhe von 2 350 € wird zu 3,1% angelegt. Berechnen Sie die Höhe des Guthabens nach 9 Jahren.

Umgekehrt errechnet man zu einem Geldbetrag dessen Zeitwert bezogen auf einen früheren Zeitpunkt durch Abzinsen. Dazu teilt man durch q^n.

d) Marcel hat sich für das Jahr 2021 Großes vorgenommen. Deswegen will er am 1.1.2023 über 20 210 € auf einem Sonderkonto verfügen.
Berechnen Sie, wie viel er am 1.1.2012 eingezahlt haben muss, damit sich durch Verzinsung mit 3,8% daraus ein entsprechend hohes Guthaben ergibt.

Den Ansatz zu solchen Aufgaben kann man mit Hilfe der **Zinseszinsformel** bilden:

K_0	Anfangskapital (sprich: „K Null“)	
p	Zinssatz in %	$q = 1 + \frac{p}{100}$
n	Laufzeit in Jahren	
K_n	Endkapital (Zeitwert von K_0 nach n Jahren)	
$\mathbf{K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n}$		oder $\mathbf{K_n = K_0 \cdot q^n}$

Beispiel: Wird ein Anfangskapital von 2000 € 8 Jahre lang zu 4,5% verzinst, so ergibt sich folgendes Endkapital:

$K_8 = 2\,000 \cdot 1{,}045^8 = \underline{\underline{2\,844{,}20}}$.

Nun kommen in der Gleichung vier verschiedene Variablen vor. Alle vier könnten einmal interessant sein, d.h. nach ihnen könnte gefragt werden.
Eine entsprechende Aufgabe löst man dann, indem man alle bekannten Werte in die Formel einsetzt und die so entstandene Gleichung nach der noch nicht bekannten Größe auflöst.

Demnach gibt es vier Aufgabentypen, die sich direkt aus der Zinseszinsformel ableiten lassen.

1. Berechnung des Endkapitals K_n durch Aufzinsen (also durch Einsetzen in die Formel). (s.o. Aufgabe **a)** und Beispiel, weitere Beispielrechnung hier)
2. Berechnung des Anfangskapitals K_0 durch Abzinsen (s.o. Aufgabe **b),** Beispielrechnung hier)
3. Berechnung des Zinssatzes p durch Wurzelziehen ($\sqrt[n]{}$, mit älteren Taschenrechnern muss man *hoch* $(\frac{1}{n})$ eingeben; Beispielrechnung hier)
4. Berechnung der Laufzeit n durch Logarithmieren ($\log_q(x) = \frac{log(x)}{log\ (q)}$; Beispielrechnung hier)

e) Lydia legt 9 875 € an. Berechnen Sie, wie hoch der Zinssatz sein muss damit sie nach 5 Jahren über 11 785,17 € verfügen kann.

f) Herr Ärmel verfügt über ein Guthaben in Höhe von 13 400 €, das zu 3,6% angelegt wird. Er fragt sich, wie lange es dauert, bis sein Guthaben auf 17 509,31 € verfügen kann.

Häufig geht es um mehrere Zahlungen:

g) Im Folgenden wird ein Zinssatz von 5,3% zu Grunde gelegt.
Herr S. legt am 1.1.2010 einen Betrag in Höhe von 2 600 € an, am 31.12.2012 überweist er weitere 1 100 € auf das entsprechende Konto und am 1.1.2014 nochmals 1 100 €. Berechnen Sie den Kontostand vom 1.1.2015.

Sobald es um mehrere Zahlungen geht, ist die **Fundamentale Regel der Finanzmathematik** zu beachten:

> Zwei oder mehrere Geldbeträge oder Zahlungen kann man dann und nur dann addieren, subtrahieren, gleichsetzen oder miteinander vergleichen, wenn sie sich auf denselben Zeitpunkt beziehen.
>
> Ist das nicht der Fall, muss man sie zuerst entsprechend aufzinsen bzw. abzinsen.

h) Frau P. verfügt Anfang 2007 über ein Guthaben von 950 €, Herr T. legt Anfang 2008 einen Betrag in Höhe von 3 200 € auf seinem Konto an. Frau B.s Guthaben beläuft sich Ende 2011 auf 1 650 €. Ende 2013 nutzen alle drei ihre Guthaben für eine gemeinsame Investition. Berechnen Sie, über wie viel Geld sie zu diesem Zeitpunkt zusammen verfügen können.
Geben Sie an, welche der folgenden Rechnungen zur korrekten Lösung führt oder geben Sie begründet an, ob die entsprechende Rechnung ein zu geringes oder ein zu hohes Ergebnis liefern würde.

A1: $950 + 3200 + 1650$ ……………………………………

A2: $950 \cdot 1{,}053^7 + 3200 \cdot 1{,}053^6 + 1650 \cdot 1{,}053^2$ …………………………

A3: $(((950 \cdot 1{,}053^7) + 3200) \cdot 1{,}053^6 + 1650) \cdot 1{,}053^2$ …………………………

A4: $(((950 \cdot 1{,}053) + 3200) \cdot 1{,}053^4 + 1650) \cdot 1{,}053^2$ …………………..

Zum Vergleich des Werts verschiedener Zahlungen müssen die entsprechenden Zahlungszeitpunkte berücksichtigt werden. Zum Vergleich müssen alle Zahlungen zuerst auf einen gemeinsamen Vergleichszeitpunkt umgerechnet werden. Sinnvollerweise rechnet man auf den jetzigen Zeitpunkt um. Der entsprechende Wert heißt **Barwert**.

i) Frau Meitner hat eine attraktive Stelle in den USA angeboten bekommen und plant daher, ihr Haus in der Nähe von Stuttgart zu verkaufen.
Herr Behnke bietet dafür 450 200 €, zahlbar sofort.
Frau Abel bietet 480 550 €, kann aber erst in drei Jahren zahlen.

Die Firma Simplex ist bereit 150 000 € direkt zu zahlen, 175 000 € in zwei Jahren und weitere 180 000 € nach weiteren vier Jahren.
Untersuchen Sie, welches aus finanzmathematischer Sicht das günstigste Angebot ist. (p% = 5,2%)

Links:

Überblick: Übersicht (Formeln), Lückentext Rentenrechnung
Übungsaufgaben: Zinseszinsrechnung, komplexe Aufgaben .