

Finanzmathematik

2 Rentenrechnung

Häufig erfolgen Zahlungen in regelmäßigem Abstand und in gleicher Höhe (regelmäßige Einzahlungen, Rückzahlung von Schulden in Raten ...). Solche Zahlungen nennt man eine Rente, die einzelne Zahlung nennt man Rate.

In unserem Rahmen betrachten wir ausschließlich jährliche Zahlungen. Man unterscheidet, ob die Zahlungen jeweils zum Ende des Jahres (nachsüssig) oder zum Anfang des Jahres erfolgen (vorschüssig.)

- a) Welche Rente ist (bei gleicher Höhe der Rate, gleicher Laufzeit und gleichem Zinssatz) ist mehr wert, die nachsüssige oder die vorschüssige?

Eine Rente ließe sich mit den bisherigen Mitteln als eine „Sammlung“ verschiedener Einzahlungen behandeln:

Herr Borel legt sechs Jahre lang Ende jeden Jahres 2114 € an ($p = 4,5\%$)
Berechnen Sie sein Guthaben nach sechs Jahren.

b) $R_6 = 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots$
 $+ 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 = \dots\dots\dots$

Das selbe lässt sich „in einem Rutsch“ mit der folgenden Formel berechnen:

Nachsüssige Rentenendwertformel:

R_n : nachsüssiger Rentenendwert;

r: Rate;

p: Zinssatz; $q = 1 + \frac{p}{100}$;

n: Laufzeit;

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Beispiel: Ein Sparer legt Ende jeden Jahres 13 000 € zu 5 % an. Wie hoch ist sein Guthaben nach 8 Jahren?

$$R_8 = 13\,000 \cdot \frac{1,05^8 - 1}{0,05} = 124\,138,42$$

Nach 8 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 124 138,42 €.

Taschenrechner: Beim Eintippen in den Taschenrechner beachten: Bruchstrich wirkt wie Klammer. Also für obiges Beispiel:

$$13\,000 \cdot (1,05^8 - 1) / 0,05.$$

- c) Verwende die Formel für das Ersparte des Herrn Borel (Aufgabe k)

Rentenrechnung

Würde Herr Borel dagegen die selben Geldbeträge jeweils zu Anfang des Jahres (also sechs Jahre lang Anfang jeden Jahres 2114 € an mit $p\% = 4,5\%$) einzahlen, würde jeder einzelne Betrag ein Jahr länger verzinst.

Damit sind wir bei der **vorschüssigen Rentenendwertformel**

Nachschüssige Rentenendwertformel:

\bar{R}_n : nachschüssiger Rentenendwert;

r: Rate;

p: Zinssatz; $q = 1 + \frac{p}{100}$;

n: Laufzeit;

$$\bar{R}_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q.$$

Beispiel: Ein Sparer legt Anfang jeden Jahres 13 000 € zu 5 % an. Wie hoch ist sein Guthaben nach 8 Jahren?

$$\bar{R}_8 = 13\,000 \cdot \frac{1,05^8 - 1}{0,05} \cdot 1,05 = 130345,34$$

Nach 8 Jahren beläuft sich sein Guthaben auf 130345,34 €.

Taschenrechner: Beim Eintippen in den Taschenrechner beachten: Bruchstrich wirkt wie Klammer. Also für obiges Beispiel:

$$13000 \cdot (1,05^8 - 1) / 0,05 \cdot 1,05.$$

Damit ergeben sich folgende Berechnungsmöglichkeiten:

- d) **M1:** Behandlung als Einzelbeträge: $R_6 = 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots + 2114 \cdot 1,045 \dots = \dots$
M2: Berechnung aus dem nachschüssigen Rentenendwert (also dem Ergebnis von k)) $\bar{R}_6 = R_6 \dots = \dots$
- e) **M3:** Das Einsetzen in die vorschüssige Rentenendwertformel:
 \dots

Links:

Leitprogramm:

<http://home.datacomm.ch/tolinnemann/matleitfin.doc>

Überblick: [Übersicht](#) (Formeln) , [Lückentext](#)

Zinseszinsrechnung, [Lückentext](#) Rentenrechnung

Übungsaufgaben: [Zinseszinsrechnung](#), [komplexe Aufgaben](#) .