

# grundlegende Funktionen

## Betragsfunktion [\[Analysis\]](#)

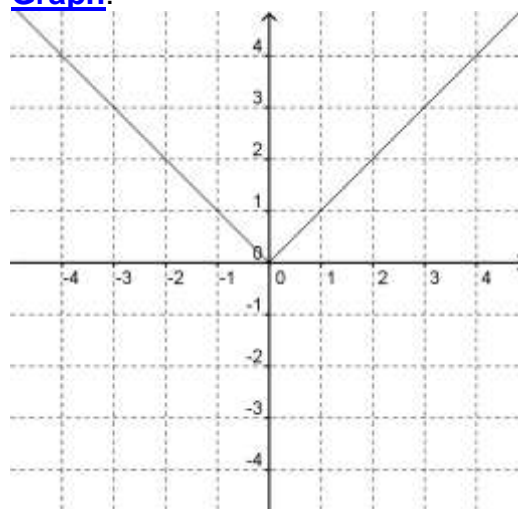
Funktionsgleichung:  $f(x) = |x|$ .  
 (Sprich: „f von x gleich [Betrag](#) von x“)

Die Betragsfunktion weist jeder positiven Zahl x als Funktionswert dieselbe Zahl x zu, jeder negativen Zahl x ihr Negatives  $-x$  (und damit eine positive Zahl).  
 Der Betrag von 0 ist 0.

anders ausgedrückt:  $f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

**Eigenschaften:** siehe [Betragsfunktion](#).

**Graph:**



**Siehe auch:** [Betrag](#).

## Signumfunktion [\[Analysis\]](#)

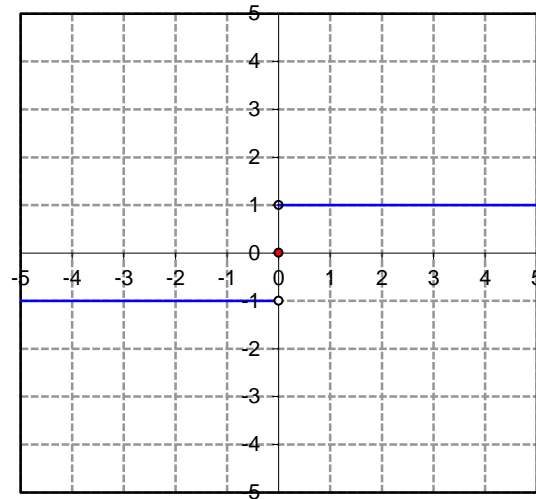
Funktionsgleichung:  $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$

Die Signumfunktion ist eine Art Vorzeichenfunktion. Sie weist jeder positiven Zahl x als Funktionswert die 1 zu, jeder negativen Zahl x die  $-1$ . Das Signum von 0 ist 0.



**Eigenschaften:** Siehe [Signumfunktion](#).

**Graph:**



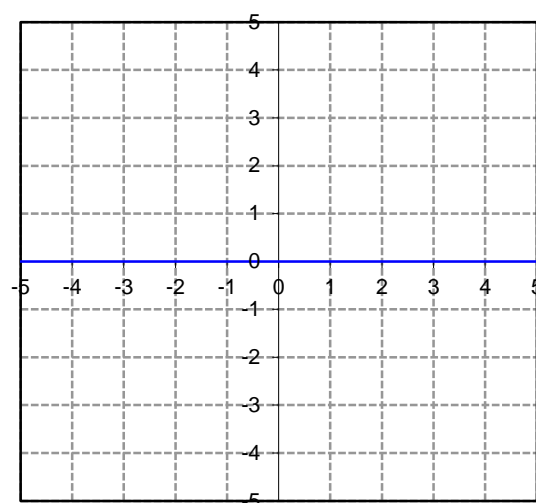
## Lineare Funktionen

**Nullfunktion:**  $f$  mit  $f(x) = 0$  [\[Analysis\]](#)

Die vielleicht langweiligste Funktion überhaupt. Es handelt sich um eine [konstante Funktion](#).

**Graph:** Ihr Graph ist die [x-Achse](#).

mehr dazu unter [Nullfunktion](#).



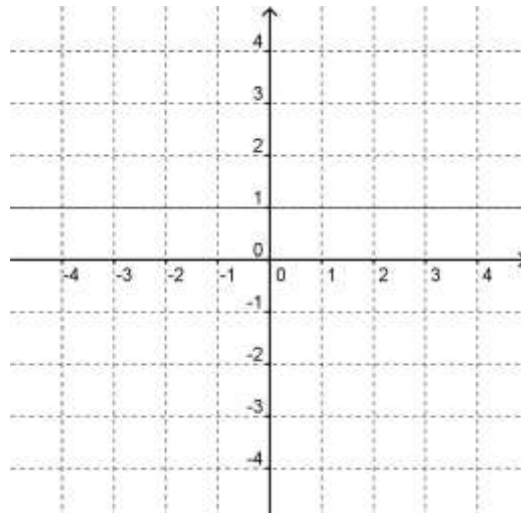
**Die (abgesehen von der [Nullfunktion](#)) einfachste [konstante Funktion](#):**

**$f$  mit  $f(x) = 1$**  [\[Analysis\]](#)



Irritierender Weise taucht im Funktionsterm gar keine Funktionsvariable auf - es ist ganz egal, was man einsetzt, immer kommt 1 heraus.

**Graph:** Der Graph ist die waagerechte Gerade, die die y-Achse in der Höhe 1 schneidet.



genauere Informationen: [hier](#)

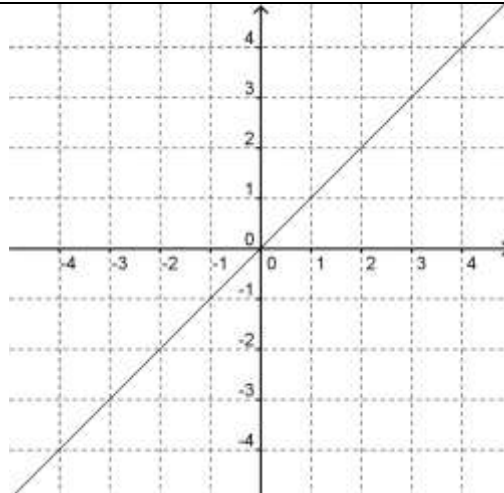
**Winkelhalbierende, erste** [\[Analysis\]](#)

andere Bezeichnung: identische Funktion.

Die steigende [Ursprungsgerade](#) zur [linearen Funktion](#)  $f(x) = x$  schließt mit der [x-](#) und der [y-Achse](#) jeweils einen  $45^\circ$ -Winkel ein (wenn x- und y-Achse dieselbe Einheiteneinteilung haben) und heißt daher Winkelhalbierende. Zur Unterscheidung von der fallenden Ursprungsgeraden mit der gleichen Eigenschaft nennt man sie „erste Winkelhalbierende“.  $f$  heißt auch identische Funktion und ist ihre eigene [Umkehrfunktion](#).

**Graph:**



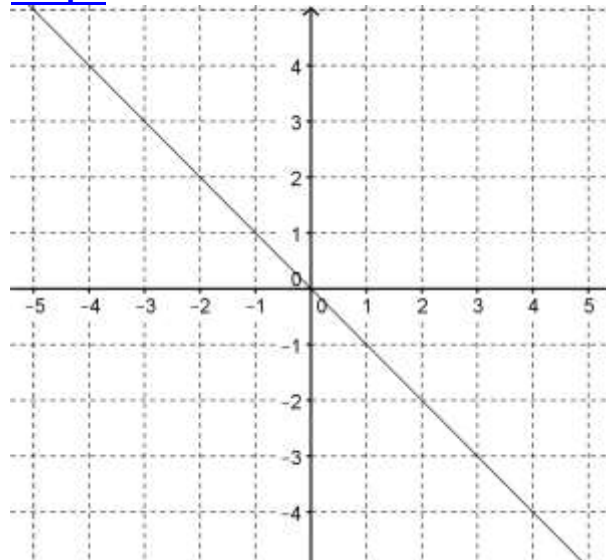


genauere Informationen: [hier](#)

### Winkelhalbierende, zweite [\[Analysis\]](#)

Die fallende [Ursprungsgerade](#) zur [linearen Funktion](#)  $f(x) = -x$  schließt mit der [x-](#) und der [y-Achse](#) jeweils einen  $45^\circ$ -Winkel ein (wenn x- und y-Achse dieselbe Einheitseneinteilung haben) und heißt daher Winkelhalbierende. Zur Unterscheidung von der steigenden Ursprungsgeraden mit der gleichen Eigenschaft nennt man sie „zweite Winkelhalbierende“.

[Graph:](#)



genauere Informationen: [hier](#)

## (nichtlineare) [Potenzfunktionen](#)

Die einfachste [quadratische Funktion](#) (ihr Graph ist sozusagen die



„Standardnormalparabel“:

$$f(x) = x^2 \quad [\text{Analysis}]$$

**Eigenschaften:**

Definitionsmenge:  $D(f) = \mathbb{R}$ ;

Wertemenge:  $W(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ;

stetig, differenzierbar;

Ableitungen:

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Symmetrie:

achsensymmetrisch zur y-Achse

y-Achsenabschnitt ist 0;

0 ist die einzige Nullstelle (und zwar doppelte Nullstelle);

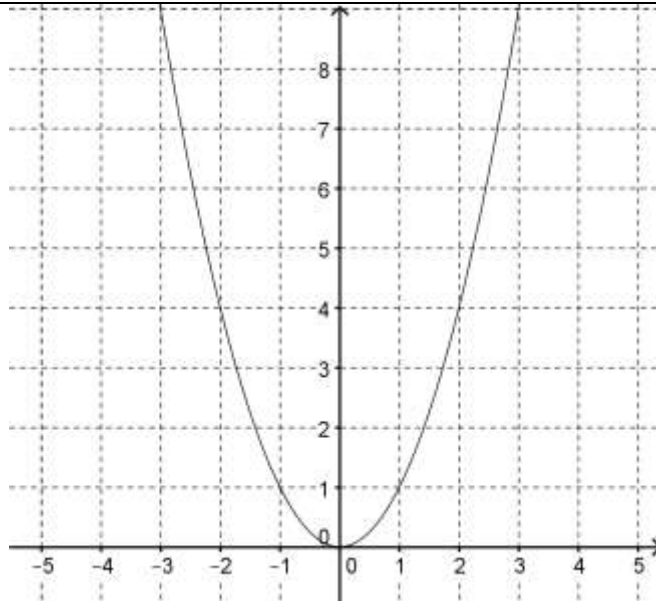
lokaler und absoluter T.P.  $(0 | 0)$  (der Scheitelpunkt);  
streng monoton fallend für  $x < 0$  streng monoton steigend für  
 $x > 0$ .

Krümmung: überall linksgekrümmt; keine Wendepunkte.

Umkehrfunktion:  $f$  eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  hat eine  
Umkehrfunktion, nämlich die Wurzelfunktion.

Graph:





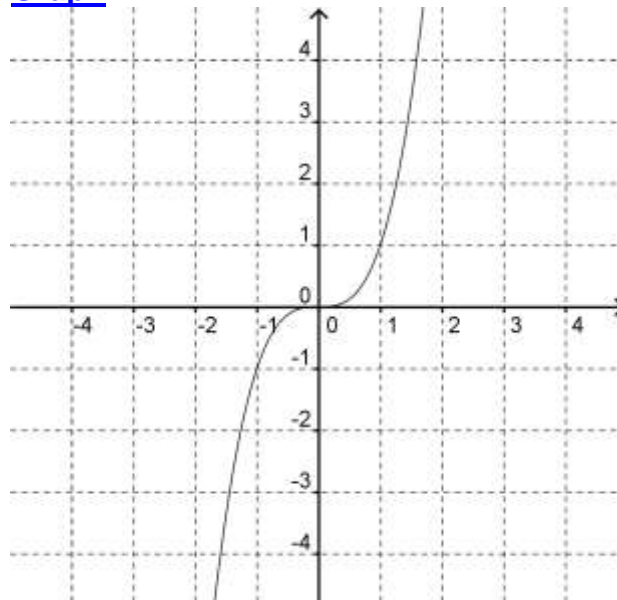
genauere Informationen: [hier](#)

Die einfachste kubische Funktion:  $f(x) = x^3$  [\[Analysis\]](#)

Diese Funktion gehört zu den [Potenzfunktionen](#) ( $x^n$ ) mit natürlichem Exponenten.

$f$  hat eine dreifache Nullstelle im Ursprung.

[Graph:](#)



genauere Informationen: [hier](#)

## Gebrochenrationale Funktionen

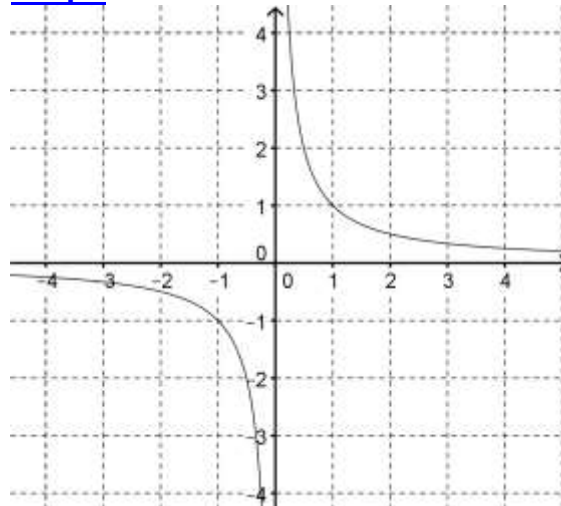


Die einfachste gebrochen-rationale Funktion [\[Analysis\]](#)  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ;

Diese Funktion gehört zu den [Potenzfunktionen](#) ( $x^n$ ) mit negativen Exponenten.

[Umkehrfunktion](#) zu sich selbst.

[Graph](#)

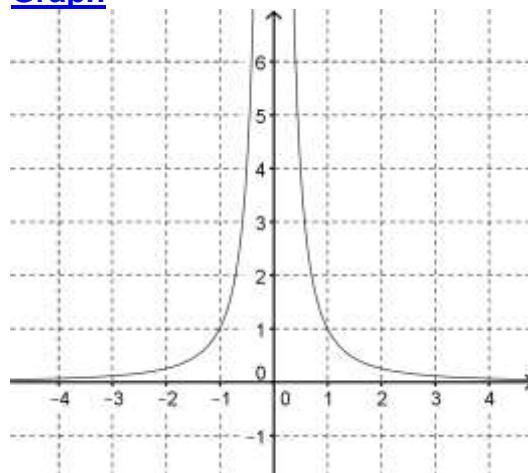


Kurvendiskussion: [kdisk\\_rational\\_1\\_durch\\_x.pdf](#).

Die einfachste gebrochen-rationale Funktion mit Nennergrad 2 [\[Analysis\]](#)

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2};$$

[Graph](#)



genauere Informationen: [hier](#)

## Wurzelfunktionen



## Wurzelfunktion [\[Analysis\]](#)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2};$$

[Umkehrfunktion](#) zu  $f$  mit  $f^{-1}(x) = x^2$  mit  $D(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ;

**Eigenschaften:**

$$D(f) = \mathbb{R}_{\geq 0};$$

$$W(f) = \mathbb{R}_{\geq 0};$$

stetig; differenzierbar;

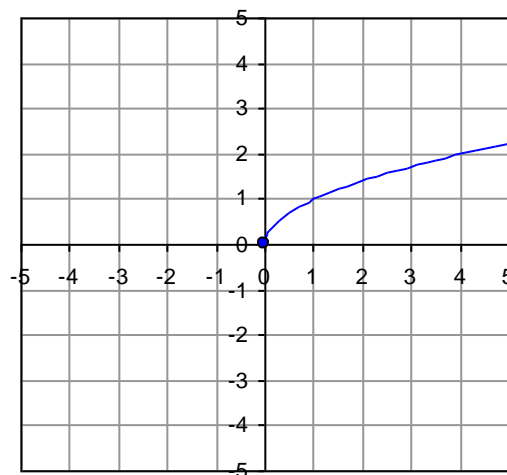
[Ableitung](#):  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

keine Symmetrie zum Koordinatensystem;

[Achsen Schnittpunkte](#):  $S_y(0; 0)$ ,  $S_x(0; 0)$ ;

streng monoton steigend; keine lok. Extrema;  
rechtsgekrümmt; keine [Wendepunkte](#)

### [Graph](#)



## Kubikwurzel (Dritte Wurzel) [\[Analysis\]](#)

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} & \text{für } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (\text{Beachte: } \sqrt[3]{x} = x^{1/3})$$

**Eigenschaften:**

[Definitionsmenge](#):  $D(f) = \mathbb{R}$ ;





Wertemenge:  $W(f) = \mathbb{R}$ ;

stetig, bei  $x = 0$  nicht differenzierbar (Bemerkenswert: Dies widerspricht der anschaulichen Vorstellung von Differenzierbarkeit, denn man kann den Graph „ohne Ecken und Sprünge“ durchzeichnen. Es gibt auch eine Tangente, nur dass diese senkrecht ist. Daher gibt es keine Tangentensteigung.)

Ableitung:  $f'(x) = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ ;

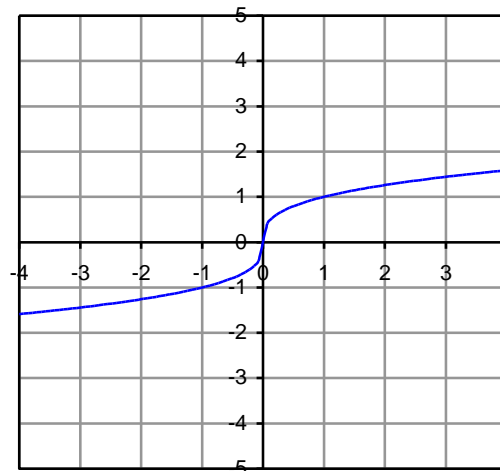
punktsymmetrisch zum Ursprung;

Achsen Schnittpunkte:  $S_y(0; 0)$ ,  $S_x(0; 0)$ ;

streng monoton steigend; keine lok. Extrema;  
rechtsgekrümmt für  $x > 0$ ; linksgekrümmt für  $x < 0$ ;

Wendepunkt  $(0; 0)$  (bemerkenswert: obwohl  $f''(0)$  gar nicht Null ist, nicht einmal definiert!)

Graph



## Trigonometrische Funktionen

**Sinus-Funktion** [[Analysis](#), [trigonometrische Funktionen](#)]

Eine der trigonometrischen Funktionen bzw. Winkelfunktionen

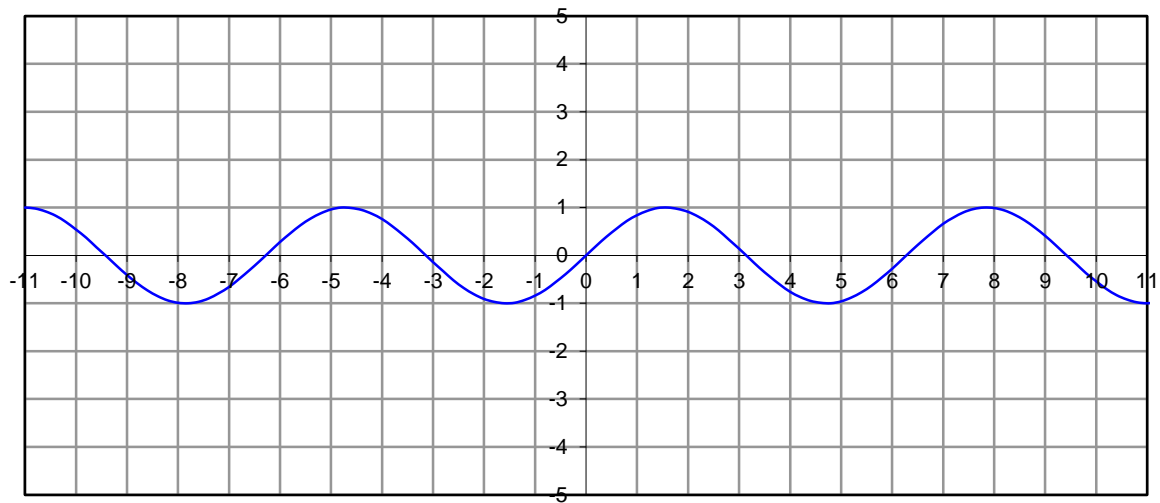
**Bezeichnung**: sin

Grundlegendes zum Verständnis des [Sinus](#): hier

**genauere Informationen zu cos**: [hier](#)



## Graph



## Cosinus-Funktion [[Analysis](#), [trigonometrische Funktionen](#)]

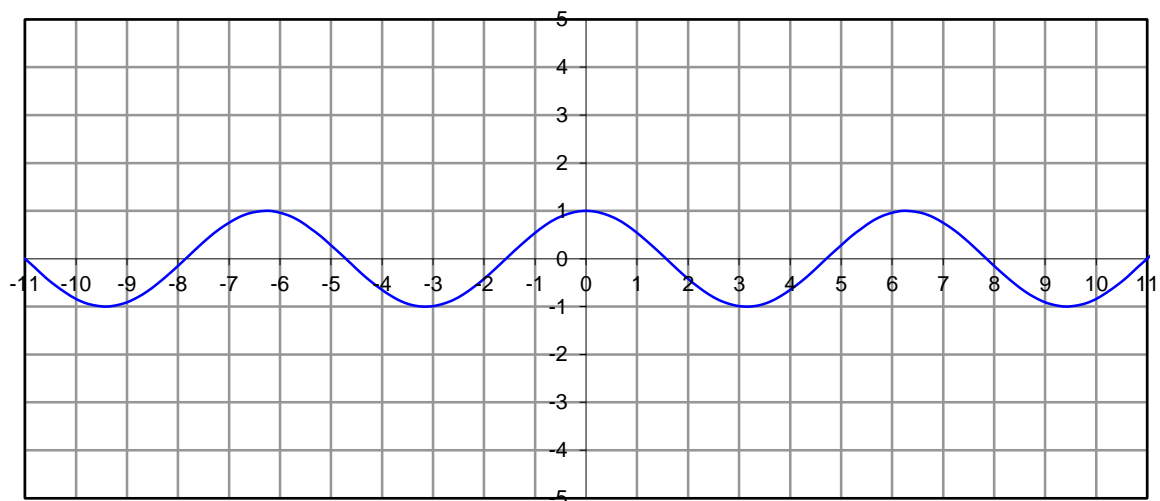
Eine der Winkelfunktionen.

**Bezeichnung:** cos;

Grundlegendes zum Verständnis des [Cosinus](#): hier

**genauere Informationen zu cos:** [hier](#)

[Graph:](#)



## Exponentialfunktionen

### Exponentialfunktion, natürliche [[Analysis](#)]



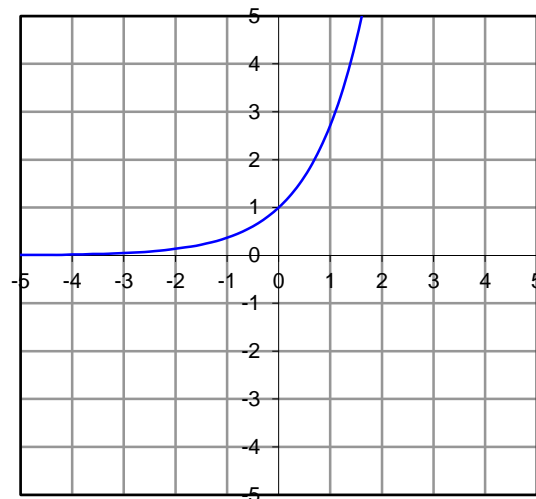
$f(x) = e^x$ , wobei  $e$  die [Eulersche Zahl](#) ist. ( $e \approx 2,7182813$ )  
**Bezeichnung:** Die e-Funktion wird häufig mit „exp“ bezeichnet.  
**Eigenschaften:**  $D(\exp) = \mathbb{R}$  ;  
 $W(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$  ;  
 stetig, differenzierbar;

**Ableitung:**  $f'(x) = e^x$   
 (Die e-Funktion und ihre Vielfachen sind die einzigen auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbaren Funktionen, die gleich ihrer eigenen [Ableitung](#) sind);

[y-Achsenabschnitt](#) ist 1; [Nullstelle](#)n gibt es keine;  
 streng monoton steigend, keine Extrema, linksgekrümmt, keine [Wendepunkte](#);

die x-Achse ist [Asymptote](#);

### Graph



### Exponentialfunktion, dekadische [Analysis](#)

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 10^x$ .

**Eigenschaften:**

[Definitionsmenge:](#)  $D(f) = \mathbb{R}$  ;

[Wertemenge:](#)  $W(f) = \mathbb{R}_{>0}$  ;

stetig, differenzierbar;

[Achsen Schnittpunkte:](#)

[y-Achsenabschnitt](#) ist 1;  $S_y(0; 1)$

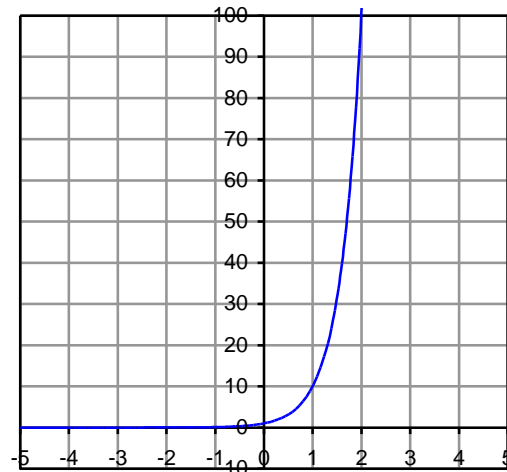


Nullstellen gibt es keine;

streng monoton steigend, keine Extrema, linksgekrümmt, keine Wendepunkte;

die x-Achse ist Asymptote;

Graph



**Gaußsche Dichtefunktion / Gaußsche Glockenkurve** [[Analysis](#),  
Wahrscheinlichkeitsrechnung]

Die Funktion  $\varphi$  (griech. Buchstabe: kleines Phi) mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Es handelt sich um die Dichtefunktion zur Standardnormalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1.

**Eigenschaften:**

Definitionsmenge:  $D(\varphi) = \mathbb{R}$ ;

Wertemenge:  $W(\varphi) = ]0; 1]$

stetig, differenzierbar;

Symmetrie:

Der Graph von  $\varphi$  ist achsensymmetrisch zur y-Achse;

Achsen Schnittpunkte:

Einziger Achsen Schnittpunkt ist



$$S_y \left( 0 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right);$$

Steigungsverhalten und Extrema:

streng monoton steigend für  $x < 0$  streng monoton fallend für  $x > 0$ .

$$\text{Lok. und abs. H.P.} \left( 0 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

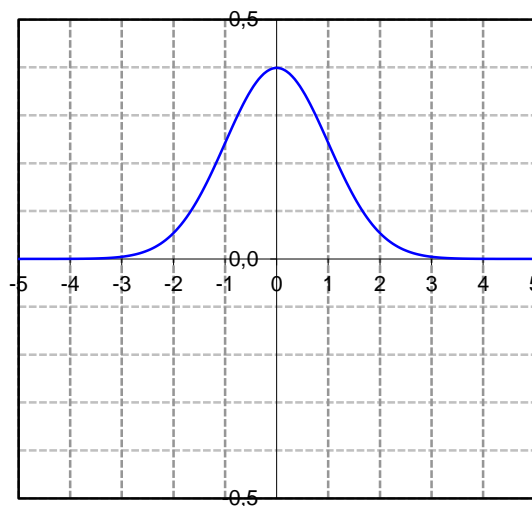
$$\text{Wendepunkte: W.P.}_1 \left( -1 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \right), \text{W.P.}_2 \left( 1 \mid \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \right).$$

Fernverhalten (Grenzwerte für betraglich große  $x$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

Die  $x$ -Achse ist Asymptote.

Graph:



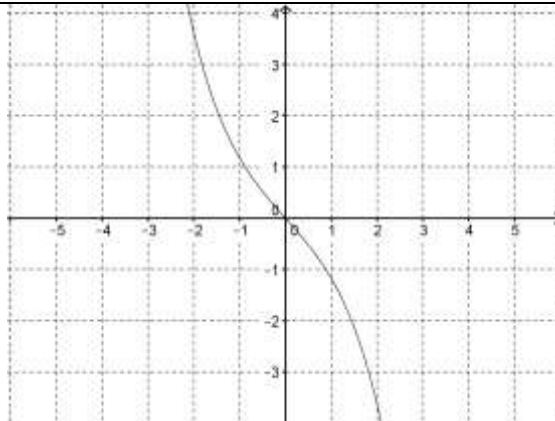
**Sinus hyperbolicus** [\[Analysis\]](#)

$$\text{Die Funktion sinh mit } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$= \frac{1}{2} \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right)$$

Graph:





genauere Informationen: [hier](#)

### Cosinus hyperbolicus [\[Analysis\]](#)

Die Funktion cosh mit  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

$$= \frac{1}{2} \left( e^x + \frac{1}{e^x} \right)$$

**Eigenschaften:**

Definitionsmenge:  $D(\cosh) = \mathbb{R}$ ;

Wertemenge:  $W(\cosh) = \mathbb{R}$ ;

stetig, differenzierbar;

Ableitungen:

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

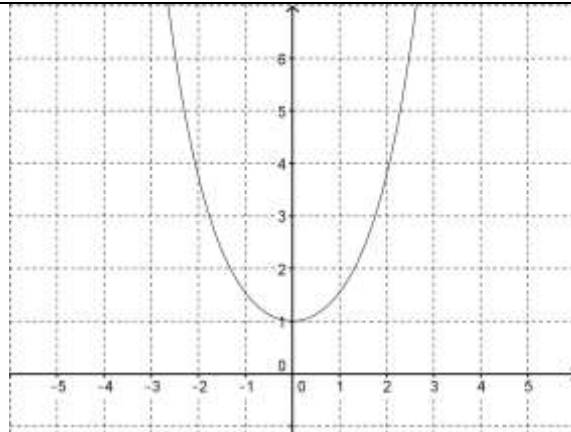
$$\cosh''(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'''(x) = \sinh(x)$$

achsensymmetrisch zur y-Achse

Graph:





Der Graph von  $\cosh$  heißt Kettenlinie. Ein frei hängendes Seil oder Kabel oder eben eine Kette nimmt idealerweise diese Form an.

## Logarithmusfunktionen

**Logarithmusfunktion**, natürliche [\[Analysis\]](#)

Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der [natürlichen Exponentialfunktion](#).

**Bezeichnung:**  $\ln$ .

**Eigenschaften:**

**Definitionsmenge:**  $D(\ln) = \mathbb{R}_{>0}$ ;

**Wertemenge:**  $W(\ln) = \mathbb{R}$ ;

stetig, differenzierbar;

einzige [Nullstelle](#) von  $\ln$  ist  $x = 1$ ,

streng monoton steigend, keine Extrema, rechtsgekrümmt,

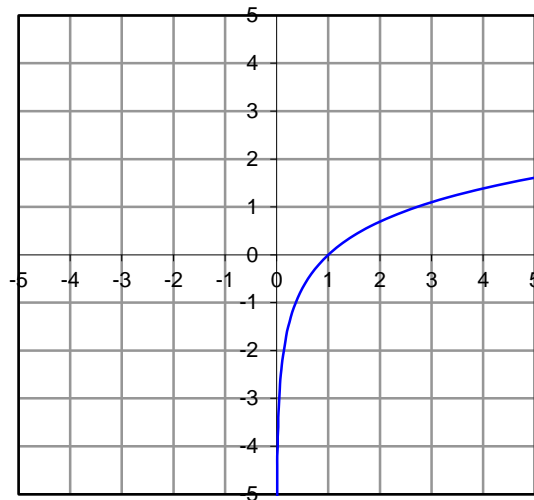
keine [Wendepunkte](#);

die y-Achse ist [Asymptote](#);

**Ableitung:**  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

**Graph:**





## Logarithmusfunktion, dekadische [\[Analysis\]](#)

Die dekadische Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der [dekadischen Exponentialfunktion](#).

**Bezeichnung:** lg.

Benennung auf dem **Taschenrechner**: Häufig „log“

**Eigenschaften:**

[Definitionsmenge](#):  $D(\lg) = \mathbb{R}_{>0}$ ;

[Wertemenge](#):  $W(\lg) = \mathbb{R}$ ;

stetig, differenzierbar;

einzige [Nullstelle](#) von lg ist  $x = 1$ ,

streng monoton steigend, keine Extrema,

rechtsgekrümmt, keine [Wendepunkte](#);

die y-Achse ist [Asymptote](#);

[Graph](#):





