

Kurvendiskussion: $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1}$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1}$$

Definitionsmenge:

$$D_{\max}(f) = \mathbb{R}$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2x + 2) \cdot e^{-x+1} + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) && \text{(Ketten- und Produktregel)} \\
 &= (2x + 2) \cdot e^{-x+1} + (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1} \\
 &= \underline{\underline{(-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -2x \cdot e^{-x+1} + (-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) \\
 &= -2x \cdot e^{-x+1} + (x^2 - 1) \cdot e^{-x+1} \\
 &= \underline{\underline{(x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= (2x - 2) \cdot e^{-x+1} + (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) \\
 &= (2x - 2) \cdot e^{-x+1} + (-x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1} \\
 &= \underline{\underline{(-x^2 + 4x - 1) \cdot e^{-x+1}}}
 \end{aligned}$$

Symmetrie:

$$f(-x) = ((-x)^2 + 2(-x) + 1) \cdot e^{-(-x)+1} = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{x+1}$$

$\neq f(x)$, aber auch $\neq -f(x)$

Also keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 1 \cdot e \approx 2,72, \text{ also } \underline{\underline{S_y(0; 2,72)}};$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$f(x) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

| rechte Seite unlösbar

| quadratische Ergänzung nicht nötig,
da $x^2 + 2x + 1$ schon ein Binom ist

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \text{ | Ablesen der } \underline{\underline{Nullstelle}} \text{ aus der } \underline{\underline{faktorierten Form}}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (doppelt)}$$

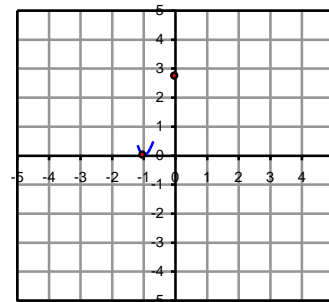
$$\underline{\underline{S_x(0 | -1)}} \text{ (Berührungspunkt)}$$



Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

$$S_y(0; 2,72)$$

doppelte Nullstelle bei $x = -1$



Verhalten für betragslich große x (Fernverhalten):

[etwas unmathematisches Austesten: $f(-10) \approx 4,85 \cdot 10^6$] $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

[etwas unmathematisches Austesten: $f(10) \approx 0,015 \approx 0$] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underline{0}$

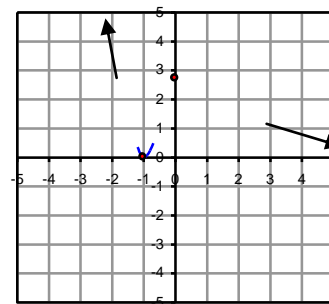
Mathematischer geht es mittels Argumentation (in Bezug auf die Grenzwerte dominiert bei einem Produkt aus e-Funktion und ganzrationaler Funktion stets die e-Funktion. Die ganzrationale Funktion ist nur bezüglich des Vorzeichens zu berücksichtigen) oder, wenn man den kennt, mit dem Satz von de l'Hospital.

Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

$$S_y(0; 2,72)$$

doppelte Nullstelle bei $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



Extrema:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 (-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1} &= 0 && | \text{Satz vom Nullprodukt} \\
 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0 &&& | \text{rechte Gleichung unlösbar} \\
 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 &&& | \cdot (-1) \\
 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 &&& | +1 \\
 \Leftrightarrow x^2 = 1 &&& | \pm\sqrt{\quad} \\
 \Leftrightarrow x = \underline{1} \vee x = \underline{-1}
 \end{aligned}$$

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(-1) = ((-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1) \cdot e^{1+1} = (1 + 2 - 1) \cdot e^2 = 2 \cdot e^2 (\approx 14,8) > 0,$$

also lok. Minimalstelle bei $x = -1$

$$f(-1) = 0 \text{ (s.o.);} \quad \underline{\text{lok. T.P. } (-1; 0)}$$

$$f''(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 - 1) \cdot e^{-1+1} = -2 \cdot e^0 = -2 = < 0, \text{ also lok. Maximalstelle bei } x = 1$$

$$f(1) = (1^2 + 2 \cdot 1 + 1) \cdot e^{-1+1} = 4 \cdot e^0 = 4; \quad \underline{\text{lok. H.P. } (1; 4)}$$



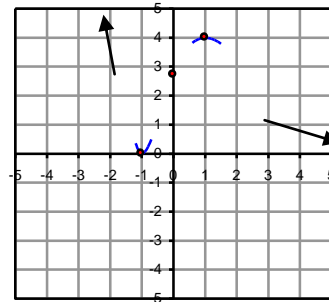
Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

$S_y (0 ; 2,72)$

doppelte Nullstelle bei $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

lok. T.P. $(-1 ; 0)$, lok. H.P. $(1 ; 4)$



Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$(x^2 - 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-x+1} = 0 \quad | \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0 \quad | \text{rechte Gleichung unlösbar}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \quad | + 1 + 1 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2 \quad | \pm \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2} \approx 1,4142 \vee x - 1 = -\sqrt{2} \approx -1,4142 \quad | + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} + 1 \approx 2,4142 \vee x = -\sqrt{2} + 1 \approx -0,4142$$

hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-0,41) = (-(-0,41)^2 + 4 \cdot (-0,41) - 1) \cdot e^{0,41+1} \neq 0, \text{ d.h. } \underline{\text{Wendestelle}} \text{ bei } x \approx -0,41$$

$$f(-0,41) = 1,4, \quad \text{also } \underline{\text{W.P.}_1(-0,41 \mid 1,4)}$$

$$f'''(2,41) = (-(2,41)^2 + 4 \cdot (2,41) - 1) \cdot e^{-2,41+1} \neq 0, \text{ d.h. } \underline{\text{Wendestelle}} \text{ bei } x \approx 2,41$$

$$f(2,41) = 2,8, \quad \text{also } \underline{\text{W.P.}_2(2,41 \mid 2,8)}$$

Wertetabelle:

x	-2	-1	-0,41	0	1	2	2,41	3	4	5
f(x)	$e^3 \approx 20,1$	0	1,4	$e \approx 2,7$	4	$9/e \approx 3,3$	2,8	$16/e^2 \approx 2,2$	$25/e^3 \approx 1,2$	$36/e^4 \approx 0,7$
		T.P.	W.P.	S_y	H.P.		W.P.			



