Kurvendiskussion zu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Gaußsche Dichtefunktion / Gaußsche Glockenkurve

Die Funktion φ (griech. Buchstabe Phi) mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{x^2}}}.$$

heißt Gaußsche Glockenkurve

Es handelt sich um die Dichtefunktion zur Standardnormalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1.
Sie spielt eine große Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließenden Statistik, da sich Binomialverteilungen sich durch Normalverteilungen näherungsweise berechnen lassen (mit Hilfe des Satzes von Moivre-Laplace).

Eigenschaften: $D(\varphi) = \mathbb{R}$; $W(\varphi) = [0 ; 1]$
stetig, differenzierbar;

Symmetrie: $\varphi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$, also ist der Graph von φ achsensymmetrisch zu y-Achse;

Ableitungen: Zur Ableitung benutzt man die Kettenregel:

$\varphi(x) = u(v(x))$ mit $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x}$, $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x}$

und $v(x) = -\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2$, $v'(x) = -x$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Für die zweite Ableitung benötigt man zusätzlich die Produktregel:

$\varphi'(x) = u(x) \cdot v(x)$

mit $u(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

und $v(x) = -x$, $v'(x) = -1$

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

<u>Achsenschnittpunkte</u>: $\varphi\,(\,0\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

also Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y\,(\,0\,|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,)$;

$\varphi\,(\,x\,) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ unlösbar, also keine Schnittpunkte mit der x-Achse

<u>Lokale Extrema und Monotonie</u>:
notwendige Bedingung: $\varphi\,'(\,x\,) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0.$

hinreichende Bedingung: $\varphi\,'(\,x\,) = 0 \wedge \varphi\,''(\,x\,) \neq 0$

$\varphi\,''(\,0\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(0^2-1)\cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0$, also lokale Maximalstelle bei $x = 0$.

$\varphi\,(\,0\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}5015.$

Lok. H.P. $(\,0\,;\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,)$

φ streng monoton steigend für $x < 0$ streng monoton fallend für $x > 0$.

Fernverhalten bzw. <u>Grenzwerte für betraglich große x</u>:

$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(\,x\,) = \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(\,x\,) = 0$

Die x-Achse ist Asymptote.
Somit ist der lok. H.P. zugleich absoluter H.P.

Wendepunkte:
notwendige Bedingung: $\varphi\,''(\,x\,) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(x^2-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Bei $x = -1$ wechselt φ'' von + nach -, bei 1 von – nach +, also ist –1 eine Links-Rechts-Wendestelle, 1 dagegen eine Rechts- Links-Wendestelle.

$\varphi\,(\,-1\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}3989$

Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für $\varphi\,(\,1\,)$.

W.P.$_1$ (-1 | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$), W.P.$_2$ (1 | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$)