# Kurvendiskussion $x \cdot (x-1)\,e^{-x}$

$f(x) = x(x-1)\,e^{-x} = (x^2 - x)\,e^{-x}$

Ableitungen:

$f'(x) = (2x-1)\,e^{-x} + (x^2 - x)\,e^{-x} \cdot (-1)$ (Ketten- und Produktregel)

$\quad = (2x-1)\,e^{-x} - (x^2 - x)\,e^{-x}$

$\quad = \underline{\underline{(-x^2 + 3x - 1) \cdot e^{-x}}}$

$f''(x) = (-2x+3)\,e^{-x} - (-x^2 + 3x - 1)\,e^{-x}$

$\quad = \underline{\underline{(x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}}}$

$f'''(x) = (2x-5)\,e^{-x} - (x^2 - 5x + 4)\,e^{-x}$

$\quad = \underline{\underline{(-x^2 + 7x - 9) \cdot e^{-x}}}$

Definitionsbereich:

$D_{max}(f) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

Symmetrie:

$f(-x) = ((-x)^2 - (-x))\,e^{-(-x)} = (x^2 + x)\,e^{x}$

$\neq f(x)$, aber auch $\neq -f(x)$

Also keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

Achsenschnittpunkte:

$S_y \underline{\underline{(0;0)}}$;

$S_{x1} \underline{\underline{(0;0)}}$; $S_{x2} \underline{\underline{(1;0)}}$

Verhalten für betraglich große x:

[etwas unmathematisches Austesten: $f(-100) \approx 2{,}7 \cdot 10^{47}$ ] $\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty}}$

[etwas unmathematisches Austesten: $f(100) \approx 3{,}7 \cdot 10^{-40} \approx 0$ ] $\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) = 0}}$

Extrema:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$(-x^2 + 3x - 1)\,e^{-x} = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \vee e^{-x} = 0$ [rechte Gleichung unlösbar]

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1$

$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \vee x - \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \vee x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x \approx 2{,}618 \vee x \approx 0{,}382$

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}382) \approx 1{,}53 > 0$
$f(0{,}382) = -0{,}161$      lok. T.P.( 0,382 | -0,161 )
$f''(2{,}618) \approx -0{,}16 < 0$
$f(2{,}618) = 0{,}309$      lok. H.P.( 2,618 | 0,309 )

Wendepunkte:
notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
$(x^2 - 5x + 4)\, e^{-x} = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \vee e^{-x} = 0$ [rechte Gleichung unlösbar]
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4$
$\Leftrightarrow (x - 2{,}5)^2 = 2{,}25$
$\Leftrightarrow x - 2{,}5 = 1{,}5 \vee x - 2{,}5 = -1{,}5$
$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$
hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(1) \approx -1{,}1 \neq 0$, d.h. Wendestelle bei $x = 1$
$f'''(4) = 0{,}05 \neq 0$, d.h. Wendestelle bei $x = 4$
$f(1) = 0$,      also W.P.$_1$( 1 | 0 )
$f(4) \approx 0{,}22$,      also W.P.$_2$( 4 | 0,22 )