Lore Lorentz LORE LORENTZ SCHULE

[Kurvendiskussion](#) $3\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 30\cdot x^2 + 72\cdot x + 27$

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 27$;
$x \in IR$

a) Bilden Sie die ersten drei Ableitungen von f.

$f'(x) = 12\cdot x^3 - 24\cdot x^2 - 60\cdot x + 72$
$f''(x) = 36\cdot x^2 - 48\cdot x - 60$
$f'''(x) = 72\cdot x - 48$

b) Von welchem Quadranten in welchen Quadranten verläuft der Graph von f? (Fernverhalten)

Verhalten für betraglich große x:
Der Graph von f verläuft vom II. Quadranten in den I. Quadranten, da der Leitkoeffizient positiv und der Grad gerade ist.

c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

Da im Term von f in der Normalform sowohl gerade wie ungerade Exponenten auftreten, liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von f;
Tipp: 3 ist eine mehrfache Nullstelle.

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(0) = 27$, also $S_y\ \underline{(0 ; 27)}$;
Schnittpunkt(e) mit der x-Achse:
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow 3\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 30\cdot x^2 + 72\cdot x + 27 = 0$
systemat. Probieren: $f(3) = 0$
Polynomdivision:
$(3\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 30\cdot x^2 + 72\cdot x + 27) : (x - 3) = 3\cdot x^3 + x^2 - 27\cdot x - 9$
$\underline{-(3\cdot x^4 - 9\cdot x^3)}$
$x^3 - 30x^2$
$\underline{-(x^3 - 3x^2)}$
$27x^2 - 72x$
$\underline{-(27x^2 - 81x)}$
$9x + 27$
$-\underline{(9x + 27)}$
0

also $x = 3 \vee 3\cdot x^3 + x^2 - 27\cdot x - 9 = 0$
Jetzt geht der Spaß von vorne los! Wenn man einen geeigneten Taschenrechner zur Hand hat, der einen Befehl wie polysolv kennt, nimmt man nun die Abkürzung und lässt sich die weiteren Nullstellen berechnen. Hier die Version „zu Fuß-Rechnen“:
systemat. Probieren: $x = 3$
Polynomdivision:
$(3\cdot x^3 + x^2 - 27\cdot x - 9) : (x - 3)$
$= 3\cdot x^2 + 10\cdot x + 3$
also $x = 3 \vee x = 3 \vee 3\cdot x^2 + 10\cdot x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ (doppelt) $\vee\ x^2 + 3,\overline{3}\cdot x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ (doppelt) $\vee\ x^2 + 3,\overline{3}\cdot x + 2,\overline{7} = 1,\overline{7}$
$\Leftrightarrow x = 3$ (doppelt) $\vee\ (x + 1,\overline{6})^2 = 1,\overline{7}$
$\Leftrightarrow x = 3$ (doppelt) $\vee\ x + 1,\overline{6} = 1,\overline{3} \vee x + 1,\overline{6} = -1,\overline{3}$
$\Leftrightarrow x = 3$ (doppelt) $\vee\ x = -0,\overline{3} \vee x = -3$
$S_{x1}\ \underline{(-3 ; 0)}$; $S_{x2}\ \underline{(-0,\overline{3} ; 0)}$; $S_{x3}\ \underline{(3 ; 0)}$

e) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Sattelpunkte von f
Tipp: 3 ist eine mehrfache Nullstelle

Extrempunkt(e) / Sattelpunkt(e):
notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$12\cdot x^3 - 24\cdot x^2 - 60\cdot x + 72 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 72 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - x + 0{,}25 = 6{,}25$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee (x - 0{,}5)^2 = 6{,}25$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x - 0{,}5 = 2{,}5 \vee x - 0{,}5 = -2{,}5$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3 \vee x = -2$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
$f''(-2) = 180 > 0$, d.h. lok. Minimalstelle bei $x = -2$
$f''(1) = -72 < 0$, d.h. lok. Maximalstelle bei $x = 1$
$f''(3) = 120 > 0$, d.h. lok. Minimalstelle bei $x = 3$
lok. T.P.$_1$ $\underline{(-2 \mid -125)}$; H.P. $\underline{(1 \mid 64)}$; T.P.$_2$ $\underline{(3 \mid 0)}$

f) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von f.

Wendepunkt(e):
notw. Bed.: $f''(x) = 0$
$36 \cdot x^2 - 48 \cdot x - 60 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1{,}\overline{3} \cdot x - 1{,}\overline{6} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1{,}\overline{3} \cdot x + 0{,}\overline{4} = 2{,}\overline{1}$

$\Leftrightarrow (x - 0{,}\overline{6})^2 = 2{,}\overline{1}$

$\Leftrightarrow x - 0{,}\overline{6} = 1{,}45 \vee x - 0{,}\overline{6} = -1{,}45$

$\Leftrightarrow x \approx 2{,}117 \vee x \approx -0{,}783$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(-0{,}79) \approx -104{,}88 \neq 0$,
d.h. Wendestelle bei $x = -0{,}79$
$f'''(2{,}12) = 104{,}64$ ungleich 0,
d.h. Wendestelle bei $x = 2{,}12$
W.P.$_1$ $\underline{(-0{,}8 \mid -44{,}475)}$; W.P.$_2$ $\underline{(2{,}1 \mid 30{,}156)}$

g) An welchen Stellen hat f die Steigung 96?

$f'(x) = 96$ (mit CAS: solve, sonst:)
systemat. Probieren: $x = -1$
Polynomdivision und quadrat. Ergänzung:

$x = \underline{-1} \vee x \approx \underline{3{,}56} \vee x \approx \underline{-0{,}56}$

h) Zeichen Sie den Graph von f.