Kurvendiskussion $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$f(x) = \frac{1}{x^3}$

Definitionsmenge:
Nenner gleich Null setzen:
$x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ (dreifach)
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ableitungen:

$f(x) = x^{-3}$, also $f'(x) = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$ (Potenzregel der Differentialrechnung)

$f'(x) = -3 \cdot x^{-4}$, also $f''(x) = -3 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = \frac{12}{x^5}$

$f''(x) = 12 \cdot x^{-5}$, also $f'''(x) = 12 \cdot (-5) \cdot x^{-6} = -\frac{60}{x^6}$

Symmetrie:

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$, also liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

Verhalten für betraglich große x („Fernverhalten“):
Zählergrad (nämlich 3) ist größer als der Nennergrad (nämlich 0)
daraus folgt:
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

nichtsenkrechte Asymptote:
$a(x) = 0$ – d.h., die x-Achse ist Asymptote. [*Dies folgt direkt aus dem Verhalten für betraglich große x.*]

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$0 \notin D(f)$, also gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Schnittpunkt(e) mit der x-Achse:
$f(x) = 0$ | Zähler gleich null setzen
$\Leftrightarrow 1 = 0$
unlösbar, also gibt es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Definitionslücke:
0 ist dreifache Nullstelle des Zählers (also VZW), aber keine Nullstelle des Nenners.
Also ist 0 Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

senkrechte Asymptote:
x = 0. [*Dies folgt direkt aus der Aussage über die Definitionslücke.*]

Extrempunkt(e) / Sattelpunkt(e):
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$-\frac{3}{x^4} = 0$ | Zähler gleich null setzen

$\Rightarrow 3 = 0$
unlösbar, also keine Extremstellen.

Wendepunkt(e):
notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$\frac{12}{x^5} = 0$ | Zähler gleich null setzen

$\Rightarrow 12 = 0$
unlösbar, also keine Wendestellen.