

Kurvendiskussion $x^3 - 2 \cdot x^2$

$$f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2; x \text{ aus } \mathbb{R}$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x$$

$$f''(x) = 6 \cdot x - 4$$

$$f'''(x) = 4$$

Symmetrie:

Es liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor, da der Funktionsterm in der Normalform sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält.

oder:

$f(-x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x \neq f(x)$, aber auch $\neq -f(x)$, also liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor.

Verhalten für betraglich große x:

Der Graph von f verläuft vom III. Quadranten in den I. Quadranten, da der Leitkoeffizient positiv und der Grad ungerade ist.

oder anders ausgedrückt:

Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, da der Leitkoeffizient positiv und der Grad ungerade ist.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 0, \text{ also } S_y(0 | 0);$$

Schnittpunkt(e) mit der x-Achse:

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 = 0 \mid \text{Ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0 \mid \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (doppelt)} \vee x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (doppelt)} \vee x = 2$$

$$S_{x1}(0 | 0) \text{ (Berührungspunkt)}, S_{x2}(2 | 0)$$

Extrempunkt(e) / Sattelpunkt(e):

$$\text{notw. Bed.: } f'(x) = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot x = 0 \mid \text{Ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \mid \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$$

$$\text{hinr. Bed.: } f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f''(0) = -4 < 0, \text{ d.h. lok. Maximalstelle bei } x = 0$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0, \text{ d.h. lok. Minimalstelle bei } x = \frac{4}{3}$$

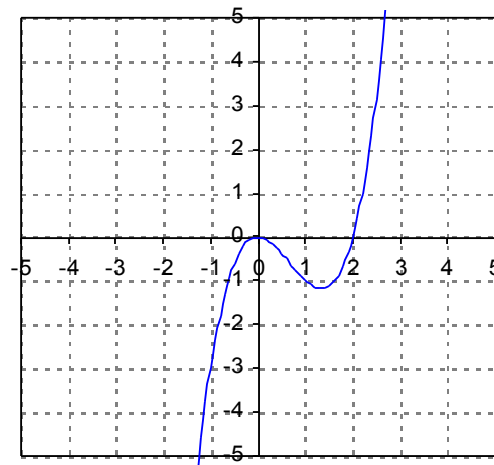
$$\text{lok. H.P. } (0 | 0); \text{ lok. T.P. } \left(\frac{4}{3} \mid \left[\dots\right]\right)$$

Wendepunkt(e):

$$\text{notw. Bed.: } f''(x) = 0$$

$$6 \cdot x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot x = 4$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0,$$

d.h. Wendestelle bei $x = \frac{2}{3}$

W.P. ($\frac{2}{3} | \dots$)

Weitere Aufgaben:

Stellen Sie die Gleichung der Tangente von f an der Stelle 2 auf.

Schnittpunkte mit der Funktion t mit $t(x) = 4x - 8$:

$$f(x) = t(x)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 = 4x - 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8 = 0$$

systematisches Probieren (Einsetzen von 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8): $f(2) = 0$

Polynomdivision:

$$(x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8) : (x - 2) = x^2 - 4$$

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$$

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (doppelt)} \vee x = -2$$

Demnach ist t die Tangente von f bzgl. der Stelle $x = 2$.

Fläche zwischen f und t

$$d(x) = f(x) - t(x)$$

$$= x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8$$

$$D(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2 \cdot x^2 + 8x = 0$$

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8) dx \right| = 32$$