Horner-Schema und Nullstellenbestimmung

Erinnerung: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades (kubische Funktion) hat mindestens eine und höchstens drei Nullstellen.

Bei einer kubischen Funktion, die nur ganzzahlige Koeffizienten hat, gilt: Wenn es überhaupt eine ganzzahlige Nullstelle gibt, muss es sich um einen Teiler des y-Achsenabschnitts oder um das Negative eines solchen Teilers handeln.

Beispiel: $f(x) = -2x^3 + 30x^2 + 50x - 750 = 0$
Systematisches Probieren: Die Teiler von 750 und ihre Negativen; Erfolg bei x = 5:

Hier zur Erläuterung das Hornerschema mit Zwischenergbnissen:

	Koeffizienten von f			
	-2	**30**	**50**	**-750**
Zwischen-rechnung	*-2 (von oben übertragen)*	***-2 · 5*** ***+30***	***-20 · 5*** ***+50***	***150 · 5*** ***- 750***
x = 5	**-2**	**20**	**150**	0 = f(5)
Eingesetzte Zahl	**Koeffizienten des Ergebnisterms der Abspaltung**			*Ergebnis*

So viel will kein Mensch aufschreiben (Das Schema soll ja Arbeit *sparen*), also schreibt man:

x	-2	30	50	-750
5	**-2**	**20**	**150**	0

Dies liefert dasselbe Ergebnis wie eine **Polynomdivision** durch den Linearfaktor $(x - 5)$ (Man dividiert dabei durch $(x - 5)$, weil dieser Linearfaktor genau zu der Nullstelle x = 5 gehört. Man erkennt das Prinzip sofort, wenn man x = 5 in $(x - 5)$ einsetzt.)

Hier wird die Polynomdivision durchgeführt:

$(\mathbf{-2}x^3 + 30x^2 + 50x - 750) : (x - 5) = \mathbf{-2}x^2 + \mathbf{20}x + \mathbf{150} = 0$

$\underline{-(-2x^3 + 10x^2)}$ $\qquad -(\mathbf{-2}x^2 \cdot (x - 5))$

$\mathbf{20}x^2 + 50x$

$\underline{-(20x^2 - 100x)}$ $\qquad -(\mathbf{20}x \cdot (x - 5))$

$\mathbf{150}x - 750$

$\underline{-(150x - 750)}$ $\qquad -(\mathbf{150} \cdot (x - 5))$

0

Bemerkung: Wer sich noch einmal klar macht, wie die ganz normale schriftliche Division funktioniert, hat mit der Polynomdivision meist wenig Schwierigkeiten.

Die Zwischenergebnisse des Horner-Schemas

-2	**20**	**150**

Werden nun also als Koeffizienten einer abgespaltenen Polynoms aufgefasst:
$\mathbf{-2}x^2 + \mathbf{20}x + \mathbf{150}$

Da dieses Polynom einen kleineren Grad hat, sind wir der Lösung der Gleichung einen Schritt näher. Der Rest geht z.B. mit quadratischer Ergänzung:

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee \mathbf{-2}x^2 + \mathbf{20}x + \mathbf{150} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10x - 75 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10x = 75$
$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10x + 25 = 100$
$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee (x - 5)^2 = 100$
$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x - 5 = -10 \vee x - 5 = 10$
$\Leftrightarrow \quad x = \underline{5} \vee x = \underline{-5} \vee x = \underline{15}$
Antwort: Die Nullstellen von f sind –5, 5 und 15

Quizfrage: Wie lautet die Funktionsgleichung von f in faktorisierter Form?

beliebte Fehler

Hinweis auf **Stolpersteine**: Viele lassen bei der Polynomdivision gerne die Klammern weg und schreiben
„$\underline{20x^2 - 100\,x}$“ statt
„$\underline{-(20x^2 - 100\,x)}$“
Das geht meistens bei den negative Zahlen schief: Man muss ja letztlich +100 x rechnen (nämlich: -(-100x)).

Noch ein Hinweis auf **Stolpersteine**: Koeffizienten in eine Tabelle eintragen ist gar nicht so einfach: $-2x^3 + x$ muss folgendermaßen eingetragen werden:

X	-2	0	1	0

(Warum eigentlich?)

Das entsprechende Problem entsteht übrigens auch bei der Polynomdivison.
Es ist hilfreich, zu ergänzen und hinzuschreiben: $-2x^3 + 0\,x^2 + x + 0$

Links: Basistext Gleichungen

Übungen

1 Bestimmen Sie alle Nullstellen von f – wenn möglich

Aufgabe	***Lösung***
a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 19x - 30$	*$x = -2 \vee x = -3 \vee x = 5$*
b) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 10x + 6$	*$[= 2(x-3)(x^2-2x-1)]$; $x = 3 \vee x \approx -0{,}41 \vee x \approx 2{,}41$*
c) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12$	*$[=(x-4)(x^2 + 2x - 3)]$; $x = 4 \vee x = -3 \vee x = 1$*
d) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 10$	*$x = -2 \vee x \approx -4{,}1926 \vee x \approx 1{,}1926$*
e) $f(x) = 0{,}5x^3 + 2{,}5x^2 + 0{,}5x - 5$	*$x = 2$ (keine weitere Lösung)*
f) $f(x) = 3x^3 - 12$	*$x \approx 1{,}5874$*
g) $f(x) = 10x^5 - 40x^4 + 10x^3 + 60x^2$	*$x = 0$ (doppelte Nullstelle) $\vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$*

h) $f(x) = 2(x-4)(x^2+2x-3)$	*$x = 4 \vee x = -3 \vee x = 1$ (s. o.)*
i) $x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 14x^2 + x + 7$	*$x = 1$ (doppelt) $\vee x = -1$ (doppelt) $\vee x = 7$*

2 Stellen Sie selbst eine Aufgabe dieser Art.

- **Bestimmen Sie dazu** eine Funktion dritten Grades mit drei ganzzahligen Nullstellen. Wählen Sie dazu drei beliebige Nullstellen, z.B., 1, -2, 4 und einen Vorfaktor, z.B. 2; stellen Sie die faktorisierte Form dazu auf, also 2 (x – 1) (x + 2) (x – 4), Lösen Sie die Klammern auf. So erhalten Sie einen ganzrationale Funktion, die Sie auf Nullstellen untersuchen können – die Ergebnisse zur Kontrolle kennen Sie ja schon ...

Für Fortgeschrittene:

- Bestimmen Sie eine Funktion dritten Grades mit einer ganzzahligen und zwei irrationalen Nullstellen;
- Bestimmen Sie eine Funktion dritten Grades die nur eine Nullstelle hat (damit die Aufgabe am Ende lösbar ist, sollte diese ganzzahlig sein).