Übungsaufgaben ökonomische Anwendungen

Nr | **Aufgabe** | **Lösung**

Aufgabe

1 Gegeben sind folgende Gleichungen zur Kosten- und Erlösfunktion:

$K(x) = 1{,}5 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 4$

$E(x) = 20{,}5 \cdot x$

Die Kapazitätsgrenze liegt bei 5 ME

a) Geben Sie den Stückpreis an und stellen Sie die Gleichungen aller ökonomischen Funktionen einschließlich beider Stückkostenfunktionen auf. Geben Sie auch den ökonomischen Definitionsbereich an.

b) Wie hoch sind die variablen Stückkosten, wenn 6 ME hergestellt werden?

c) Berechnen Sie Gewinnzone, gewinnmaximale Ausbringungsmenge und maximalen Gewinn,

d) Zeigen Sie: das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME

e) Berechnen Sie Betriebsminimum, lang- und kurzfristige PUG.

Lösung

a) $p = 20{,}5$

$k(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20 + \frac{4}{x}$

$k_v(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -1{,}5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x - 4.$

$D_{ök}$) [0 ; 5]

b) $k_v(6) = \underline{\underline{44}}$ [GE/ME]

c) $G(x) = 0$

$\Leftrightarrow -1{,}5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x - 4 = 0 \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow -3 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 + x - 8 = 0$

systemat. Probieren (Einsetzen: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8):

$G(1) = 0$

Polynomdivision

$(-3 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 + x - 8) : (x - 1) = -3x^2 + 7x + 8$

$\underline{-(-3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2)}$

$\quad 7x^2 + x$

$\quad \underline{-(7x^2 - 7x)}$

$\qquad 8x - 8$

$\qquad \underline{-(8x - 8)}$

$\qquad\quad 0$

alternativ: Horner-Schema:

	-3	10	1	-8
1	-3	7	8	0

$G(x) = (x - 1) \cdot (-3x^2 + 7x + 8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee -3x^2 + 7x + 8 = 0 \mid :(-3)$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \mid + \frac{8}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee$ [...]

Gewinnzone: [1 ; 3,17]

$G'(x) = -4{,}5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 0{,}5$

$G''(x) = -9 \cdot x + 10$

Maximierung: notw. Bed.:

$G'(x) = 0$

$-4{,}5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 0{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2{,}222 \cdot x - 1{,}111 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow x \approx 2{,}271 \vee x \approx -0{,}049 \notin D_{ök}$

hinr. Bed.: $G''(2{,}27) \approx -10{,}4 < 0$

wahlweise VZ-Tabelle von G´

x	x< -0,049	-0,049 <x<2,27	2,27 < x
G ´(x)	–	+	–
G (x)	↘	↗	↘

x_{Gmax} = 2,27 [ME]

G (x_{Gmax}) ≈ 5,35 [GE]
A.: Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 2,27 ME, der maximale Gewinn bei 5,35 GE

d) $k´(x) = 3\cdot x - 5 - \frac{4}{x^2}$

$k´´(x) = 3\cdot + \frac{8}{x^3}$

notw. Bed.: k ´ (2) = 0

hinr. Bed.: k ´´ (2) = 4 > 0. Damit ist gezeigt, dass das Betriebsoptimum bei 2 ME liegt.

e) langfristige PUG:

k (2) = 18 [GE./ME.]

$k_v (x) = 1,5\cdot x^2 - 5\cdot x + 20$
$k_v´(x) = 3 x - 5$
notwendige Bedingung: $k_v´(x) = 0$
3 x – 5 = 0
⇔ x = 5/3 ≈ 1,67
VZ-Tabelle von $k_v´$:

x	x < 5/3	5/3 < x
$k_v´(x)$	–	+
$k_v(x)$	↘	↗

lok. Minimalstelle bei x = 5/3
x_{BM} = 5/3 ≈ 1,67

kurzfristige PUG:

k_v (1,67) ≈ 15,83 [GE/ME]

2 Die Produktionskosten eines Unternehmens entsprechen der folgenden Funktionsgleichung:

$K (x) = 2\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 12\cdot x + 90$.

Das Produkt wird für 61 GE/ME an den Handel abgegeben.

a) K_f = 90 [GE]

$k (x) = 2\cdot x^2 - 2\cdot x + 12 + 90/x$
$k_v (x) = 2\cdot x^2 - 2\cdot x + 12$
$E (x) = 61\cdot x$
G (x) = E (x) – K (x)

$= -2\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 49\cdot x - 90$

b) G (5) = -45 [GE]

a) Geben Sie die Fixkosten an und stellen Sie die Gleichungen aller ökonomischen Funktionen einschließlich beider Stückkostenfunktionen auf.

b) Wie hoch ist der Gewinn bzw. Verlust bei einer Ausbringungsmenge von 5 ME?

c) Berechnen Sie Gewinnzone, gewinnmaximale Ausbringungsmenge und maximalen Gewinn,

d) Zeigen Sie: das Betriebsoptimum liegt bei 3 ME

e) Berechnen Sie Betriebsminimum, lang- und kurzfristige PUG.

c) $G(x) = 0$
$\Leftrightarrow -2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 90 = 0$
systemat. Probieren: $G(2) = 0$

$(-2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 90) : (x - 2)$
$= -2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 45$
$x = 2 \vee -2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 45 = 0$
$\Leftrightarrow$ [...]
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x \approx 4{,}27 \vee x \approx -5{,}27 \notin D_{ök}$
Gewinnzone: [2 ; 4,27]
$G'(x) = -6x^2 + 4x + 49$
$G'(x) = -12x + 4$
Maximierung:

notw. Bed.: $G'(x) = 0$
$\Leftrightarrow -6x^2 + 4x + 49 = 0$
$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow x \approx 3{,}21 \vee x \approx -2{,}54 \notin D_{ök}$

hinr. Bed.: $G''(3{,}21) \approx -34{,}5 < 0$

ALTERNATIV: VZ-Tabelle von G´

x	x< -2,54	-2,54 <x<3,21	3,21 < x
$G'(x)$	–	+	–
$G(x)$	↘	↗	↘

$x_{Gmax} = 3{,}21$ [ME]

d) notw. Bed.: $k'(3) = 0$

hinr. Bed.: $k''(3) = \ldots > 0$

$x_{BO} = \underline{\underline{3}}$ [ME]

e) langfr. PUG:

$k(3) = 54$ [GE./ME]

$k_v(x) = 2x^2 - 2x + 12$
$k_v'(x) = 4x - 2$
notwendige Bedingung: $k_v'(x) = 0$
$4x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0{,}5$
VZ-Tabelle von k_v':

x	x < 0,5	0,5 < x
$k_v'(x)$	–	+
$k_v(x)$	↘	↗

lok. Minimalstelle bei $x = 0{,}5$
$x_{BM} = 0{,}5$ [ME]
kurzfristige PUG:

$k_v(0{,}5) = 11{,}5$ [GE./ME]

3 Für eine Unternehmung lassen sich die variablen Kosten mit der folgenden Gleichung bestimmen:

$K_v(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 14 \cdot x$. Die Fixkosten liegen bei 72 GE, der Preis beträgt 30,5 GE/ME.

a) Geben Sie die Gleichungen aller ökonomischen Funktionen einschließlich beider Stückkostenfunktionen auf.

b) Berechnen Sie Gewinnzone, gewinnmaximale Ausbringungsmenge und maximalen Gewinn.

c) Entscheiden Sie rechnerisch, ob das Betriebsoptimum liegt bei 3, 6 oder 7 ME liegt.

d) Bestimmen Sie den Extrempunkt der variablen Stückkostenfunktion und geben Sie die ökonomischen Fachbegriffe für seine Koordinaten an.

a) $K(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 14 \cdot x + 72$

$k(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 14 + 72/x$
$k_v(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 14$
$E(x) = 30{,}5 \cdot x$
$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -0{,}5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 16{,}5 \cdot x - 72$

b) $G(x) = 0$
$-0{,}5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 16{,}5 \cdot x - 72 = 0$
systemat. Probieren: $G(3) = 0$

$(-0{,}5 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 16{,}5 \cdot x - 72) : (x - 3)$
$= \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$
Gewinnzone: [3 ; 9,87]
$G'(x) = -1{,}5\, x^2 + 8\, x^2 + 16{,}5$
$G''(x) = -3\, x + 8$
Maximierung:

notw. Bed.: $G'(x) = 0$
$-1{,}5\, x^2 + 8\, x^2 + 16{,}5 = 0$
$\Leftrightarrow \ldots$

hinr. Bed.: $G''(6{,}92) = \ldots < 0$

$x_{max} \approx 6{,}92$
c) notw. Bed.: $k'(3) = \ldots \neq 0$

$k'(6) = 0$

$k'(7) = \ldots \neq 0$

hinr. Bed.: $k''(6) = \ldots > 0$

$x_{BO} = 6$ [ME]

[hier nicht gefragt: 20 [GE/ME] ist die langfristige PUG]

d) notw. Bed.: $k_v'(x) = 0$

$x - 4 \cdot = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$

hinr. Bed.: $k_v''(4) = 1 > 0$

$k_v(4) = 6$

T.P (4 ; 6)
$x_{BM} = 4$ [ME] ist das Betriebsminimum; 6 [GE/ME] ist die langfristige PUG.

---

4 Die Situation eines Monopolisten lässt sich bzgl. Erlös und Kosten durch folgende Gleichungen wiedergeben:

$K(x) = K(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 360.$

$E(x) = -x^2 + 102 \cdot x.$

a) Geben Sie die Gleichungen der Preisabsatzfunktion, der

a) $p(x) = -x + 102$

$k(x) = x^2 - 2 \cdot x + 10 + 360/x$
$k_v(x) = x^2 - 2 \cdot x + 10$
$G(x) = E(x) - K(x) =$

$-x^3 + x^2 + 92 \cdot x - 360$

b) $k'(x) = 2 \cdot x - 2 - 360/x^2$
$k''(x) = 2 + 720/x^3$
$k_v'(x) = 2 \cdot x - 2$
$k_v''(x) = 2$

Gewinnfunktion und der beiden Stückkostenfunktionen an.

b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen der Stückkostenfunktionen.

c) Berechnen Sie Gewinnzone (Tipp: x = 5), gewinnmaximale Ausbringungsmenge und maximalen Gewinn sowie die Koordinaten des Cournotschen Punktes.

d) Zeigen Sie, dass das Betriebsoptimum bei 6 ME liegt.
e) Berechnen Sie Betriebsminimum, lang- und kurzfristige PUG.

c) Nullstellen der Gewinnfunktion:
$G(x) = 0$
$\Leftrightarrow -x^3 + x^2 + 92\cdot x - 360=0$
Polynomdivision durch $(x - 5)$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee -x^2 - 4\cdot x + 72 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x^2 + 4\cdot x - 72 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x^2 + 4\cdot x + 4 = 76$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee (x + 2)^2 = 76$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x + 2 = 8{,}72 \vee x + 2 = -8{,}72$
$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 6{,}72 \vee x = -10{,}72 \notin D_{ök}$

Gewinnzone: [5 ; 6,72]
$G'(x) = -3\cdot x^2 + 2\cdot x + 92$
$G''(x) = -6\cdot x + 2$

Maximierung:

notw. Bed.: $G'(x) = 0$

$-3\cdot x^2 + 2\cdot x + 92=0$

$\Leftrightarrow x^2 - 0,\overline{6}\cdot x - 30{,}66667 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 0,\overline{6}\cdot x + 0,\overline{1} = 30,\overline{7}$

$\Leftrightarrow (x - 0,\overline{3})^2 = 30,\overline{7}$

$\Leftrightarrow x - 0,\overline{3} = 5{,}55 \vee x - 0,\overline{3} = -5{,}55$

$\Leftrightarrow x = 5{,}883 \vee x = -5{,}217 \notin D_{ök}$

hinr. Bed.: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(5{,}88) = -33{,}28 < 0$, d.h. gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei $\underline{\underline{5{,}88}}$ ME

Der max. Gewinn liegt bei $G(5{,}9) = \underline{\underline{12{,}23}}$ GE

d) notw. Bed.:

$k'(6) = 0$

hinr. Bed.: $k''(6) = \ldots > 0$

$x_{BO} = \underline{\underline{6}}$ [ME]

e) $k(6) = \underline{\underline{94}}$ [GE/ME] ist die langfristige PUG]

notw. Bed.: $k_v'(x) = 0$

$x - 1\cdot = 0$

$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{1}}$

hinr. Bed.: $k_v''(1) = 2 > 0$

$k_v(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 10 = \underline{\underline{9}}$

Das Betriebsminimum liegt bei 1 ME, die kurzfristige Preisuntergrenze liegt bei 9 GE/ME

Links zu ökonomischen Funktionen: hier