Übungsaufgaben ökonomische Anwendungen

Nr **Aufgabe**

1 Gegeben sind folgende Gleichungen zur Kosten- und Erlösfunktion:

$K(x) = 1{,}5 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 4$

$E(x) = 20{,}5 \cdot x$

Die Kapazitätsgrenze liegt bei 5 M.E.

a) Geben Sie den Stückpreis an und stellen Sie die Gleichungen aller ökonomischen Funktionen einschließlich beider Stückkostenfunktionen auf. Geben Sie auch den ökonomischen Definitionsbereich an.

b) Wie hoch sind die variablen Stückkosten, wenn 6 M.E. hergestellt werden?

c) Berechnen Sie Gewinnzone, gewinnmaximale Ausbringungsmenge und maximalen Gewinn,

d) Berechnen Sie die Minimalstelle der variablen Stückkostenfunktion (Betriebsminimum) und die minimalen variablen Stückkosten.

Lösung

a) $p = 20{,}5$

$k(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20 + \frac{4}{x}$

$k_v(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -1{,}5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x - 4.$

$D_{ök}$) [0 ; 5]

b) $k_v(6) = \underline{\underline{44}}$ [GE/ME]

c) $G(x) = 0$

$\Leftrightarrow -1{,}5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x - 4 = 0 \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow -3 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 + x - 8 = 0$

systemat. Probieren (Einsetzen: 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8):

$G(1) = 0$

Polynomdivision

$(-3 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 + x - 8):(x - 1) = -3x^2 + 7x + 8$

$\underline{-(-3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2)}$

$7x^2 + x$

$\underline{-(7x^2 - 7x)}$

$8x - 8$

$\underline{-(8x - 8)}$

0

alternativ: Horner-Schema:

	-3	10	1	-8
1	-3	7	8	0

$G(x) = (x - 1) \cdot (-3x^2 + 7x + 8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee -3x^2 + 7x + 8 = 0 \mid :(-3)$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \mid + \frac{8}{3} + (\frac{7}{6})^2$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee [...]$

Gewinnzone: [1 ; 3,17]

$G'(x) = -4{,}5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 0{,}5$

$G''(x) = -9 \cdot x + 10$

Maximierung: notw. Bed.:

$G'(x) = 0$

$-4{,}5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 0{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2{,}222 \cdot x - 1{,}111 = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow x \approx 2{,}271 \vee x \approx -0{,}049 \notin D_{ök}$

hinreichende Bedingung:

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$

$G''(2{,}271) = -9 \cdot 2{,}271 + 10 \approx -10{,}4 < 0,$

also $x_{Gmax} = \underline{\underline{2{,}27}}$ [M.E.]

alternativ: VZ-Tabelle von G´

x	*x< -0,049*	*-0,049 <x<2,27*	*2,27 < x*
G ´(x)	–	+	–
G (x)	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$x_{Gmax} = \underline{\underline{2{,}27}}$ [M.E.]

$G(2{,}27) \approx \underline{\underline{5{,}35}}$ [G.E.]

A.: Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 2,27 M.E., der maximale Gewinn bei 5,35 G.E.

d) $k_v(x) = 1{,}5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$

$k_v'(x) = 3x - 5$

$k_v''(x) = 3$

notwendige Bedingung: $k_v'(x) = 0$

$3x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5/3 \approx 1{,}67$

hinreichende Bedingung:

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) > 0$

$k_v''(1{,}67) = 3 > 0$, also $x_{BO} = \underline{\underline{1{,}67}}$

alternativ: VZ-Tabelle von k_v':

x	$x < 5/3$	$5/3 < x$
$k_v'(x)$	–	+
$k_v(x)$	↘	↗

lok. Minimalstelle bei $x = 5/3$

$x_{BM} = 5/3 \approx 1{,}67$

minimale variable Stückkosten (kurzfristige Preisuntergrenze):

$k_v(1{,}67) \approx 15{,}83$ [G.E./M.E.]

2 Die Produktionskosten eines Unternehmens entsprechen der folgenden Funktionsgleichung:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 90.$

Das Produkt wird für 61 G.E./M.E. an den Handel abgegeben.

a) Geben Sie die Fixkosten an und stellen Sie die Gleichungen aller ökonomischen Funktionen einschließlich beider Stückkostenfunktionen auf.

b) Wie hoch ist der Gewinn bzw. Verlust bei einer Ausbringungsmenge von 5 M.E.?

c) Berechnen Sie Gewinnzone und gewinnmaximale Ausbringungsmenge.

d) Berechnen Sie die Minimalstelle der variablen Stückkostenfunktion (Betriebsminimum) und die minimalen variablen Stückkosten.

a) $K_f = 90$ [G.E.]

$k(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 12 + 90/x$

$k_v(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 12$

$E(x) = 61 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$= -2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 90$

b) $G(5) = -45$ [G.E.]

c) $G(x) = 0$

$\Leftrightarrow -2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 90 = 0$

systemat. Probieren: $G(2) = 0$

$(-2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 49 \cdot x - 90) : (x - 2) = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 45$

$\underline{-(-2x^3 + 4x^2)}$

$-2x^2 + 49x$

$\underline{-(-2x^2 + 4x)}$

$45x - 90$

$\underline{-(45x - 90)}$

0

$x = 2 \vee -2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 45 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 + x - 22{,}5 = 0$

[...]

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x \approx 4{,}27 \vee x \approx -5{,}27 \notin D_{ök}$

Gewinnzone: [2 ; 4,27]

$G'(x) = -6x^2 + 4x + 49$

$G'(x) = -12x + 4$

Maximierung:

notw. Bed.: $G'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -6 x 2 + 4x + 49 = 0$

$\Leftrightarrow$ [...]

$\Leftrightarrow x \approx 3{,}21 \vee x \approx -2{,}54 \notin D_{ök}$

hinreichende Bedingung:

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$

$G''(3{,}21) = -12 \cdot 3{,}21 + 4 \approx -22{,}5 < 0$,

also $x_{Gmax} = \underline{\underline{3{,}21}}$ [M.E.]

alternativ: VZ-Tabelle von G'

x	$x < -2{,}54$	$-2{,}54 < x < 3{,}21$	$3{,}21 < x$
$G'(x)$	–	+	–
$G(x)$	↘	↗	↘

x_{Gmax} = $\underline{\underline{3{,}21}}$ [M.E.]
d) langfr. PUG:
$k(3) = 54$ [GE./M.E.]
$k_v(x) = 2x^2 - 2x + 12$
$k_v'(x) = 4x - 2$
$k_v''(x) = 4$
notwendige Bedingung: $k_v'(x) = 0$
$4x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0{,}5$
hinreichende Bedingung:
$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) > 0$
$k_v''(0{,}5) = 4 > 0$, also $x_{BM} = \underline{\underline{0{,}5}}$

alternativ: VZ-Tabelle von k_v':

x	$x < 0{,}5$	$0{,}5 < x$
$k_v'(x)$	–	+
$k_v(x)$	↘	↗

lok. Minimalstelle bei $x = 0{,}5$
$\underline{\underline{x_{BM} = 0{,}5}}$ [M.E.]
kurzfristige PUG:
$k_v(0{,}5) = \underline{\underline{11{,}5}}$ [GE./M.E.]