# Ökonomische Anwendungen Polypol

**Gegeben sind die Kostenfunktion $K$ mit $K(x) = x^3 - 8\,x^2 + 22\,x + 160$ und die Erlösfunktion $E$ mit $E(x) = 46\,x$, $D_{ök}$ = [ 0 ; 10 ]**

Lösung

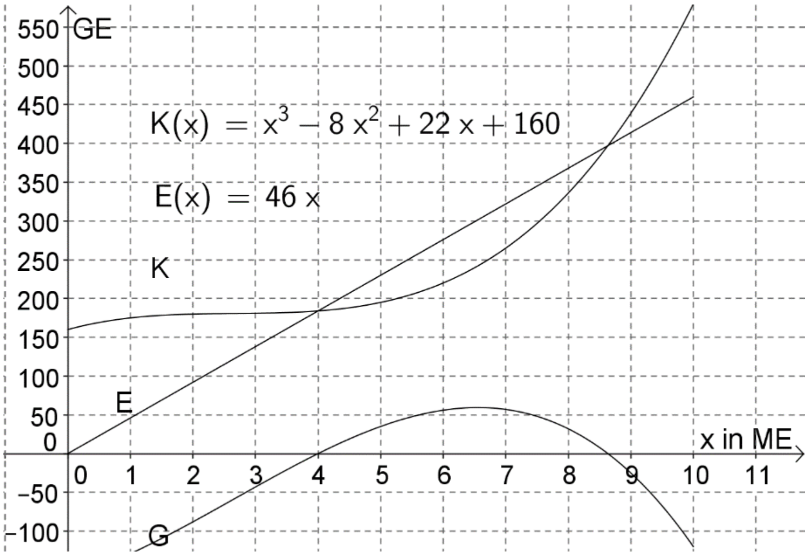


**Abb. 1**

**a) Stell die Gleichung von $G$ auf. Begründe, dass es sich um eine Polypolsituation handelt und gib den Preis sowie die Kapazitätsgrenze an.**

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 8\,x^2 + 24\,x - 160$

Da E linear ist (und nicht z.B. quadratisch), muss der Preis fest sein – er liegt bei 46 GE/ME.
Somit handelt es sich um eine Polypolsituation.
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 10 ME (obere Grenze von $D_{ök}$ ).

**b) Bilde die ersten drei Ableitungen von $G$.**

$G'(x) = -3 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 24$

$G''(x) = -6 \cdot x + 16$

$G'''(x) = -6$

**c) Gib die Fixkosten an.**

Fixkosten: $K_f = K(0) = 160$

**d) Lies die Gewinnzone am Diagramm ab und berechne sie.**

Ablesen am Graph von $G$: Gewinnzone ist ca. [ 4 ; 8,6 ]
Berechnung der Nullstellen der Gewinnfunktion
$G(x) = 0$ mit CAS (solve(g(x)=0,x)
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x \approx 8{,}63 \vee x \approx -4{,}63 \notin D_{ök}$.

hier ist noch angegeben, wie es mit Polynomdivision geht.
DAS IST NICHT ABITURRELEVANT
$G(x) = 0$
$\Leftrightarrow -x^3 + 8 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 160 = 0$
Nebenrechnung:
$(-x^3 + 8 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 160):(x-4) = -x^2 + 4 \cdot x + 40$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee -x^2 + 4 \cdot x + 40 = 0$
$\Leftrightarrow x=4 \vee x^2 - 4 \cdot x - 40 = 0$
$\Leftrightarrow x=4 \vee x^2 - 4 \cdot x + 4 = 44$
$\Leftrightarrow x=4 \vee (x-2)^2 = 44$
$\Leftrightarrow x=4 \vee x - 2 \approx 6{,}63 \vee x - 2 \approx -6{,}63$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x \approx 8{,}63 \vee x \approx -4{,}63 \notin D_{ök}$.

Die Gewinnschwelle liegt bei 4 ME, die Gewinngrenze bei ca. 8,6 ME. Die Gewinnzone ist [ 4 ; 8,63 ].

**e) Stell die Gleichungen der variablen Gesamtkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion auf.**

$$K_v(x) = x^3 - 8\,x^2 + 22\,x$$
$$k(x) = x^2 - 8\,x + 22x + \frac{160}{x}$$
$$k_v(x) = x^2 - 8\,x + 22$$

**f) Ermittle graphisch, welche Gesamtkosten und welche Stückkosten bei einer Produktion von 4 ME entstehen. Überprüfe deine Ergebnisse rechnerisch.**

Am Graph von $K$ liest man ab: $K(4) \approx 180$ [GE/ME]
Die Stückkosten sind dort: $k(4) = \frac{K(4)}{4} = \frac{180}{4} \approx 45$
Da die Erlösfunktion und die Kostenfunktion sich genau an der Stelle 4 schneiden, muss $k(4)$ genau der Steigung von $E$ entsprechen, also $k(4) = 46$ [GE/ME].
Berechnung: $K(4) = 184$

$$k(4) = \frac{184}{4} = 46$$

**g) Berechne, bei welchen Ausbringungsmengen die variablen Kosten $K_v$ bzw. die Stückkosten $k$ bei 50 GE/ME liegen.**

solve(kk(x)=50,x)
x=-4.79565 or x=3.64671 or x=9.14895

solve(kv(x)=50,x) x=5.67601

**h) Berechne die durchschnittliche Steigung der Gesamtkosten zwischen 2 und 5 ME. Vergleiche mit der Steigung der variablen Gesamtkosten in diesem Bereich und erläutere**

Beides ist gleich 5

**i) Ordne begründet zu, welche Funktionen zu den Graphen in Abbildung 2 gehören.**
**Lies Betriebsminimum, Betriebsoptimum und die beiden Preisuntergrenzen ab.**

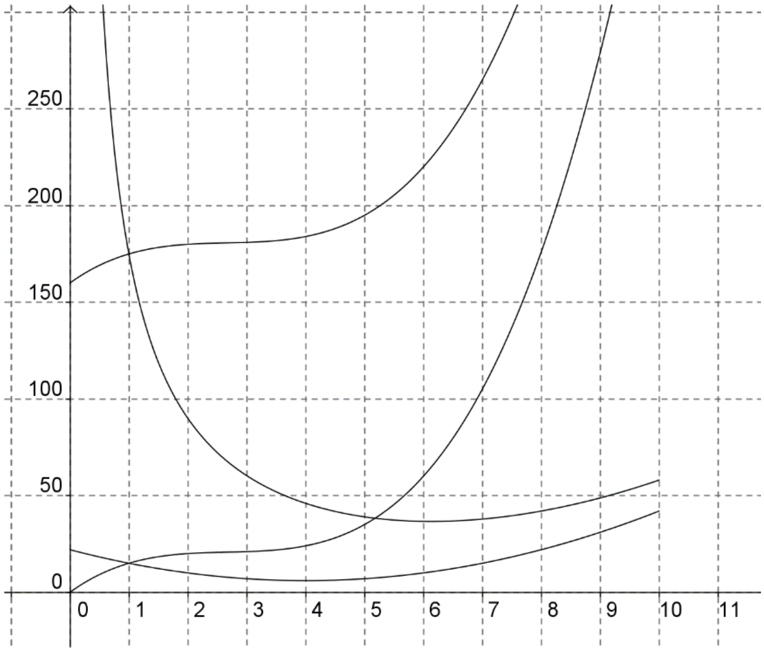


**Abb. 2**

Der Graph mit y-Achsenabschnitt bei 160 ist schon bekannt: er gehört zu $K$.
Der demgegenüber nach unten verschobene mit y-Achsen-abschnitt bei 0 muss aus genau diesen Gründen zu $K_v$ gehören.
Der Graph mit y-Achsenabschnitt bei ca 30 ist eine quadratische nach oben geöffnete Parabel und muss daher zu $k_v$ gehören.
An seinem Tiefpunkt liest man ab: $x_{BM}$ ≈ 4 [ME], kurzfristige PUG ≈ 10 [GE/ME].
Der Graph mit asymptotischem Verhalten an der y-Achsen muss aus genau diesem Grund zu $k$ gehören.
An seinem Tiefpunkt liest man ab: $x_{BO}$ ≈ 6 [ME], langfristige PUG ≈ 40 [GE/ME].

**j) Bilde die ersten drei Ableitungen von $G$.**

G´$(x)$ = - 3·x² + 16·x + 24
G´´$(x)$ = - 6·x + 16
G´´´$(x)$ = -6

***Links zu ökonomischen Funktionen:*** hier