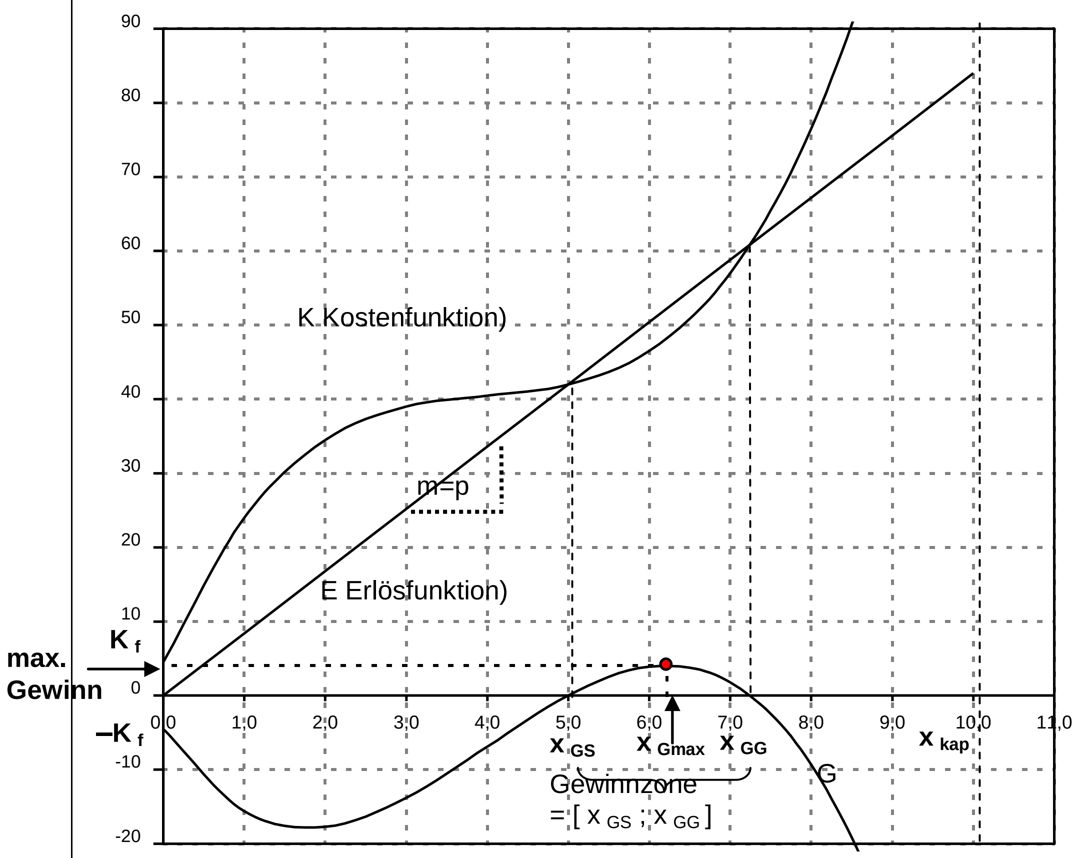
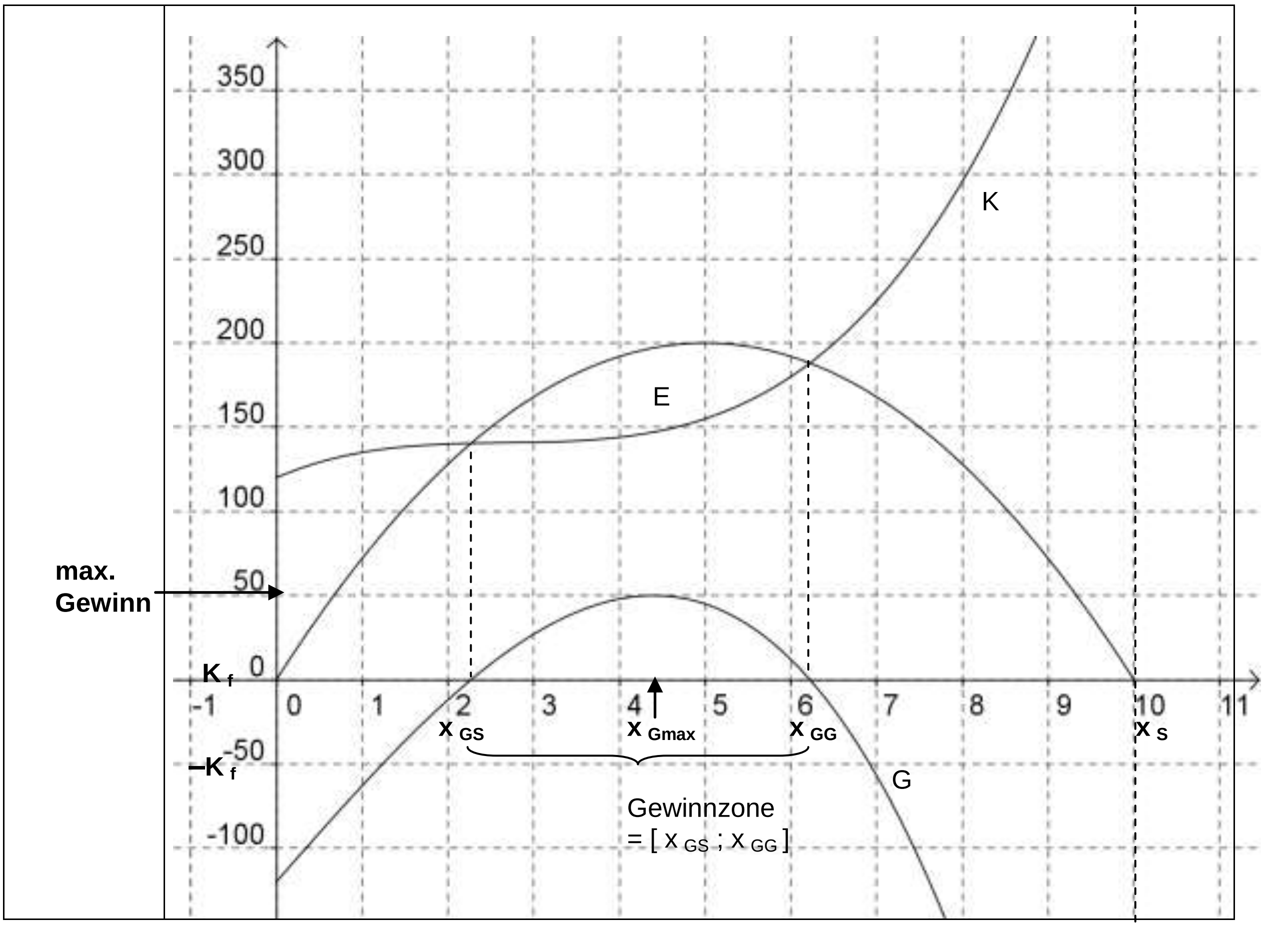
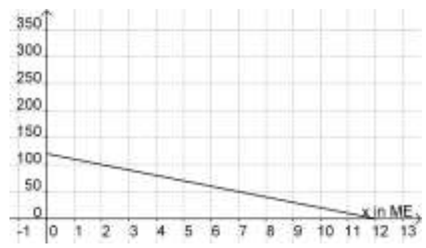
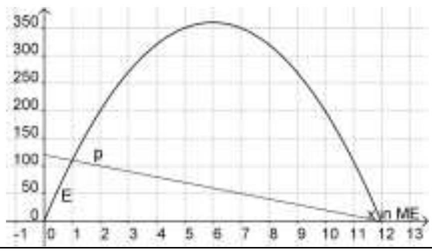
Ökonomische Funktionen im Polyopol

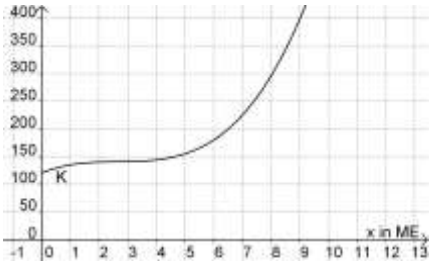
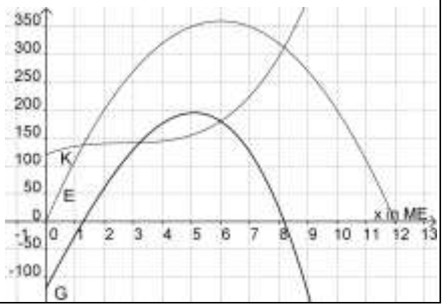


Erlösfunktion **E**	Lineare Funktion mit y-Achsenabschnitt 0 und Steigung p. Dabei ist p der (Stück-)Preis in GE/ME. **$E(x) = p \cdot x$** Der Graph der Erlösfunktion geht immer durch den Ursprung. An ihm erkennt man, ob es sich um eine Polypolsituation handelt (Ursprungsgerade) oder um eine Monopolsituation (nach unten geöffnete Parabel durch den Ursprung).	$E(x) = 8{,}4 \cdot x$ (p = 8,4. Der Stückpreis liegt also bei 8,4 GE/ME.)
Kosten-funktion **K**	Kubische Funktion, überall steigend (also darf K´ nirgends negativ sein) y-Achsenabschnitt K_f (Fixkosten)	$K(x)$ $= 0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x + 4{,}5$ ($K_f = 4{,}5$. Die Fixkosten liegen also bei 4,5 GE.)
Gewinn-funktion **G**	**$G(x) = E(x) - K(x)$.** Kubische Funktion mit negativem y-Achsenabschnitt ($-K_f$) und in der Regel zwei positiven Nullstellen (Gewinnschwelle x_{GS} und Gewinngrenze x_{GG}).	$G(x)$ $= -0{,}5x^3 + 6x^2 - 16{,}6x - 4{,}5$

Ökonomische Funktionen im Monopol



Preisabsatz-funktion **p**	fallende lineare Funktion. **p (x) = m x + b** Der y-Achsenabschnitt ist der maximale Preis. Die Sättigungsmenge x_S ist die Nullstelle von p. Sie markiert zugleich die Grenze der ökonomischen Definitionsmenge. Alle zugehörigen Funktionen sind daher für x aus $D_{ök} = [\,0\,;\,x_S\,]$ definiert. p ist die einzige Funktion aus der Kostentheorie, die überall fällt. Der Betrag von m ist die Preissenkung, die nötig ist, um eine ME mehr verkaufen zu können.	*p (x) = -10 x + 120* 
Erlösfunktion **E**	quadratische Funktion mit y-Achsenabschnitt 0. **E (x) = p (x) · x** Der Graph der Erlösfunktion geht immer durch den Ursprung. An ihm erkennt man, ob es sich um eine Polypolsituation handelt (Ursprungsgerade) oder um eine Monopolsituation (nach unten geöffnete Parabel durch den Ursprung).	*E (x) = (-10 x + 120) · x* *= -10 x² + 120 x* 
Kosten-	Kubische Funktion (also Grad 3), überall steigend (also darf K´ nirgends negativ	*K (x)*

funktion **K**	sein) y-Achsenabschnitt K_f (Fixkosten) In den ökonomischen Anwendungen der Analysis begegnet man auf Schritt und Tritt sogenannten ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen – das sind solche, die erst degressiv und dann progressiv steigen. In Bezug auf die kubischen Funktionen sind es diejenigen, die überall steigen und ihre Wendestelle im Positiven haben.	$= 0{,}5\, x^3 - 8\, x^2 + 47\, x + 150$ 
Gewinn- funktion **G**	**G (x) = E (x) – K (x)**. Kubische Funktion mit y-Achsenabschnitt (-K_f) und in der Regel zwei positiven Nullstellen (Gewinnschwelle x_{GS} und Gewinngrenze x_{GG}).	$G(x)$ $= -10\, x^2 + 120\, x$ $\quad – (0{,}5\, x^3 - 8\, x^2 + 47\, x + 150)$ $= -0{,}5\, x^3 - 2\, x^2 + 73\, x – 150$ 

Ökonomische Funktionen – Aufgabentypen und Lösungsansätze (Polypol und Monopol)

Klassische Aufgabentypen <u>ohne</u> Differentialrechnung

Preisabsatzfunktion aufstellen im Fall eines Monopols (gegeben: z.B: Prohibitivpreis b und maximale Absatzmenge oder Sättigungsmenge x_S) *Achtung*: *nicht maximale Absatzmenge und gewinnmaximale Ausbringungsmenge verwechseln*	$p(x) = m \cdot x + b$, wobei $m < 0$. b ist der Prohibitivpreis. Die Sättigungsmenge x_S ist die Nullstelle von p. Ansatz zur Errechnung von m: $m \cdot x_S + b = 0$.
Der maximale Preis liegt bei 120 GE/ME, die Sättigungsmenge bei 12 ME. Stellen Sie die Gleichung der Preisabsatzfunktion auf.	$p(x) = m \cdot x + 120.$ $p(12) = 0$, also $m \cdot 12 + 120 = 0 \quad \vert -120$ $\Leftrightarrow 12m = -120 \quad \vert :12$ $\Leftrightarrow m = -10$ $p(x) = -10 \cdot x + 120$
Sättigungsmenge oder ökonomische Definitionsmenge bestimmen im Fall eines Monopols (gegeben: Preisabsatzfunktion)	$p(x) = 0$
Bestimmen Sie die Sättigungsmenge und die ökonomische Definitionsmenge.	$p(x) = -10 \cdot x + 120 = 0 \quad \vert -120$ $\Leftrightarrow -10x = -120 \quad \vert :(-10)$ $\Leftrightarrow x = 12$ *Die Sättigungsmenge liegt bei 12 ME und der ökonomische Definitionsbereich ist [0 ; 12]*
Erlösfunktion aufstellen im Fall eines Polypols (Konstante p gegeben)	$\mathbf{E(x) = p \cdot x}$ *(linear, Ursprungsgeradenstück)*
Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion auf.	*Gegeben: Der (Stück-)Preis liegt bei 8,5 GE/ME.* $E(x) = 8{,}5 \cdot x$
Erlösfunktion aufstellen im Fall eines Monopols (Funktion p gegeben)	$\mathbf{E(x) = p(x) \cdot x}$ $= (mx + b) \cdot x = mx^2 + bx$ *(quadratisch, Parabel durch den Ursprung, nach unten geöffnet)*
Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion auf.	*Gegeben:* $p(x) = -10 \cdot x + 120.$ $E(x) = (-10 \cdot x + 120) \cdot x$ $= -10 \cdot x^2 + 120x.$
Gewinnfunktion aufstellen (wenn E und K gegeben)	$\mathbf{G(x) = E(x) - K(x)}$ *Achtung: Klammern um K(x) setzen!*
Stellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion auf.	$E(x) = -10 \cdot x^2 + 120x$, $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 47x + 150$ $G(x)$

	= -10 · x^2 + 120 x – (0,5 x^3 - 8 x^2 + 47 x + 150) *= -0,5 x^3 - 2 x^2 + 73 x - 150*
Andere Möglichkeiten, Funktionsgleichungen aufstellen: Siehe Steckbriefaufgaben	
Gewinnschwelle und Gewinngrenze (x_{GS} und x_{GG} , Nullstellen von G)	**G (x) = 0** (oder: E (x) = K (x)) *Lösung der Gleichung mit Horner-Schema bzw. Polynomdivision. Wenn der entsprechende Taschenrechner zur Verfügung steht Lösung mit polysolv.* *Die beiden positiven Lösungen sind Gewinnschwelle (die kleinere) und Gewinngrenze (die größere)*
Gewinnzone berechnen	**G (x) = 0** (s.o.); Gewinnzone: [x_{GS} ; x_{GG}]
Berechnen Sie die Gewinnzone.	*G (x) = 0* *-0,5 x^3 - 2 x^2 + 73 x – 150 = 0* *Lösung mit poly-solv ergibt: x = -15,04 (nicht im ökonomischen Definitionsbereich) oder x = 2,28 oder x = 8,76* *Gewinnzone [2,28 ; 8,76]*
Kosten berechnen (bzw. Erlös oder Gewinn/Verlust) bei gegebener Ausbringungsmenge von x_0 ME.	Einsetzen: K (x_0) (bzw. E (x_0) oder G (x_0))
In der Produktionsperiode wurden 2 ME produziert und verkauft. Berechnen Sie den Gewinn bzw. Verlust.	*G (2) = -16.* *Es entstand ein Verlust in Höhe von 16 GE.*
Ausbringungsmenge berechnen bei gegebe-nen Kosten, Erlös oder Gewinn/Verlust) von y_0 GE.	**K (x) = y_0** lösen (bzw. E (x) = y_0 oder G (x) = y_0) *Lösung der Gleichung je nachdem linear oder mit quadratischer Ergänzung oder Polynomdivision*

Anwendungen Differentialrechnung

Grenzkostenfunktion K´ aufstellen, d.h. K ableiten	Wenn K die Gleichung K (x) = a x^3+ b x^2 + c x + d hat, so gilt: K´(x) = 3a x^2+ 2b x + c.
Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion.	*K (x) = 0,5 x^3 - 8 x^2 + 47 x + 150* *K´(x) = 1,5 x^2 - 16 x + 47*
Grenzgewinnfunktion G´ aufstellen, d.h. G ableiten	Wenn G die Gleichung G (x) = a x^3+ b x^2 + c x + d hat, so gilt: G´(x) = 3a x^2+ 2b x + c.
Geben Sie die Gleichung der Grenzgewinnfunktion auf.	*G (x) = -0,5 x^3 - 2 x^2 + 73 x – 150* *G´(x) = -1,5 x^2 - 24 x + 73*

Anwendungen Differentialrechnung: Erlösmaximierung im Monopol

erlösmaximale Ausbringungsmenge (x_{Emax}) bzw. maximalen Erlös berechnen im Fall des Monopols.	1. Möglichkeit: maximale Absatzmenge (zweite Nullstelle der Erlösfunktion) ist bekannt: x_{Emax} = x_{ma} / 2

	<u>2. Möglichkeit</u>: mit Differentialrechnung: <u>erlösmaximale Ausbringungsmenge</u>: notwendige Bedingung: $E´(x) = 0$ hinreichende Bedingung: $E´(x) = 0 \wedge E´´(x) < 0$ (Bed. für Maximalstelle) Einsetzen von x in E´´ zur Überprüfung, ob das Ergebnis negativ ist – Hinweis: E´´ ist eine Konstante! Damit ist x_{Emax} berechnet. <u>maximaler Erlös</u>: Einsetzen in E: $E (x_{Emax})$

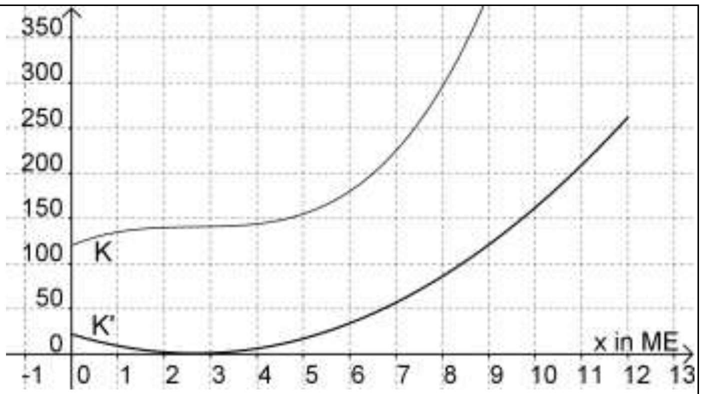
Anwendungen Differentialrechnung: Gewinnmaximierung

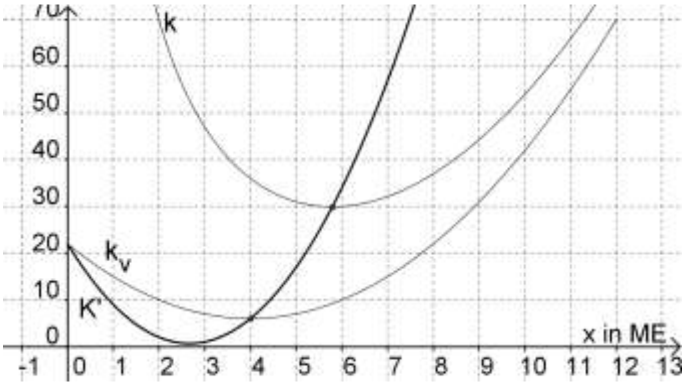
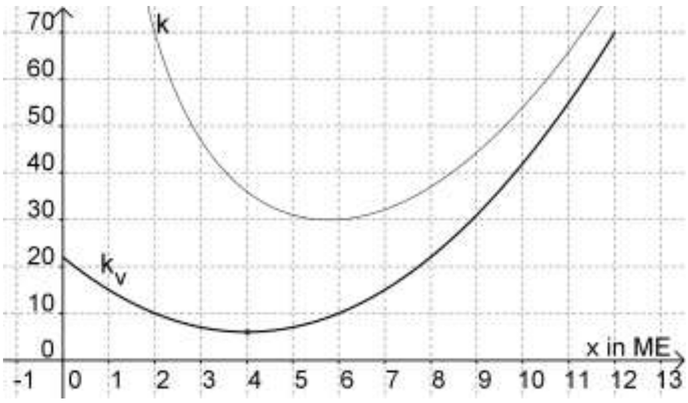
Gewinnmaximale Ausbringungsmenge gewinnmaximale Ausbringungsmenge x_{Gmax} und maximalen Gewinn berechnen	gewinnmaximale Ausbringungsmenge: notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$ In der Regel erhält man zwei Lösungen x_1 und x_2 für diese Gleichung. Oft ist $x_1 < 0$ und muss daher nicht weiter untersucht werden. hinreichende Bedingung für lok. Maximalstellen: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$ Einsetzen von x_2 in G´´ zur Überprüfung, ob das Ergebnis negativ ist. Damit ist x_{Gmax} berechnet. maximaler Gewinn: Einsetzen in G: $G(x_{Gmax})$
Berechnen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn	*notw. Bed.: $G'(x) = 0$* *$-1{,}5x^2 - 24x + 73 = 0$* *Lösung mit Hilfe des Taschenrechners (z.B. poysolv)* *$x \approx -8{,}44$ (nicht im ökonomischen Definitionsbereich) oder $x \approx 5{,}77$* *Es kann nur 5,77 sein, sicherheitshalber Überprüfung mit der hinreichenden Bedingung:* *$G''(x) = -3x - 24$* *$G''(5{,}77) = -3 \cdot 5{,}77 - 24 < 0$, also liegt bei $x = 5{,}77$ eine lok. Maximalstelle vor.* *Maximaler Gewinn: $G(5{,}77) \approx 102{,}5$.* *Der maximale Gewinn beträgt 102,5 GE.*
Cournotscher Punkt im Fall des Monopols	Gewinnmaximierung ($G'(x) = 0$) Einsetzen in p: $p(x_{Gmax})$ Cournotscher Punkt: $(x_{Gmax} \mid p(x_{Gmax}))$
Geben Sie den Cournotschen Punkt an	*Die gewinnmax. Ausbringungsmenge wurde oben schon bestimmt: $x_{Gmax} = 5{,}77$* *$p(5{,}77) = 70$* *$C(5{,}77 \mid 70)$*
weitere Aufgabentypen: *Siehe* Steckbriefaufgaben *(*uebersicht_oekonom_anwendungen_steckbrief_mit_diffrech.pdf *)*	

weitere Kostenfunktionen: ausgehend von der (Gesamt-)Kostenfunktion

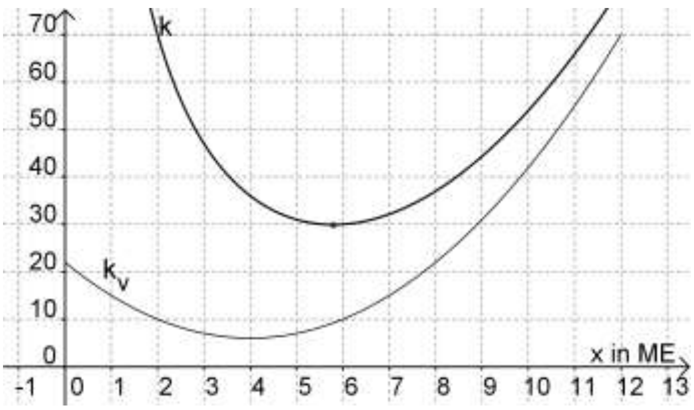
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei $d = K_f$

Grenzkostenfunktion K´	$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

<table>
<tr><td></td><td>

Wissenswertes über der Grenzkostenfunktion:
Ihre Minimalstelle ist die Wendestelle von K,
ihre Schnittstelle mit k_v ist das Betriebsminimum,
ihre Schnittstelle mit k ist das Betriebsoptimum.

</td></tr>
<tr><td>variable (Gesamt-)kostenfunktion K_v</td><td>$K_v(x) = a x^3 + b x^2 + c x$.
(Grad 3, geht durch den Ursprung)</td></tr>
<tr><td>Geben Sie die Gleichung der variablen Kostenfunktion an.</td><td>$K(x) = 0{,}5 x^3 - 8 x^2 + 47 x + 150$
$K_v(x) = 0{,}5 x^2 - 8 x + 47$</td></tr>
<tr><td>variable Stückkostenfunktion k_v</td><td>$k_v(x) = a x^3 + b x^2 + c x$.


(quadratisch, nach oben geöffnet)
Wissenswertes über k_v: Ihre Minimalstelle ist das Betriebsminimum, ihr minimaler Wert die kurzfristige PUG.</td></tr>
<tr><td>Stellen Sie die Gleichung der variablen Stückkostenfunktion auf.</td><td>$k_v(x) = 0{,}5 x^2 - 8 x + 47$</td></tr>
<tr><td>Stückkostenfunktion k</td><td>$k(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d/x$.</td></tr>
</table>

	 *(gebrochen-rational, die y-Achse ist Asymptote)* *Wissenswertes über k : Ihre Minimalstelle ist das Betriebsopzimum, ihr minimaler Wert die langfristige PUG.*
Wie lautet die Gleichung der Stückkostenfunktion?	*$k(x) = 0{,}5\,x^2 - 8\,x + 47 + 150/x$*
Betriebsminimum x_{BM} und kurzfristige Preisuntergrenze *ökonom. Bedeutung: sinkt der Preis (auch nur kurzfristig) unter die kurzfristige PUG, so muss zur Verlustminimierung die Produktion eingestellt werden.*	1. Möglichkeit: k_v minimieren: notwendige Bedingung: $k_v'(x) = 0$. hinreichende Bedingung: $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) > 0$ Die so berechnete Stelle ist x_{BM} . kurzfr. PUG = $k_v(x_{BM})$ 2. Möglichkeit: Schnittpunkt von K' und k_v berechnen: $K'(x) = k_v(x)$ Ergebnis in k_v einsetzen (oder in K')
Bestimmen Sie rechnerisch das Betriebsminimum	*$k_v(x) = 0{,}5\,x^2 - 8\,x + 47$* *$k_v'(x) = x - 8$* *$k_v''(x) = 1$* *notw. Bed.: $k_v'(x) = 0$* *$x - 8 = 0$* *$\Leftrightarrow x = 8$ (Das muss das Betriebsminimum sein. Es fehlt sicherheitshalber noch ein Argument dafür, dass 8 wirklich eine lok. Minimalstelle ist.)* *hinr. Bed.:* *$k_v'(8) = 1 > 0$, also lokale Minimalstelle.* *Somit liegt das Betriebsminimum bei 8 ME.*
Betriebsoptimum x_{BO} und kurzfristige Preisuntergrenze *ökonom. Bedeutung: sinkt der Preis unter die langfristige PUG, so kann kein Gewinn mehr erzielt werden.*	1. Möglichkeit: k minimieren (Schwierigkeit: Ableitungen von k: $k(x) = a\,x^2 + b\,x + c + d/x$ $k'(x) = 2a\,x + b - d/x^2$ $k''(x) = 2a + 2d/x^3$) notwendige Bedingung: $k'(x) = 0$. hinreichende Bedingung: $k'(x) = 0 \wedge k''(x) > 0$ Die so berechnete Stelle ist x_{BO} . langfr. PUG = $k(x_{BO})$ 2. Möglichkeit:

	Schnittpunkt von K ´ und k berechnen: K ´(x) = k (x) Ergebnis in k einsetzen (oder in K ´)

Links zu ökonomischen Funktionen: hier