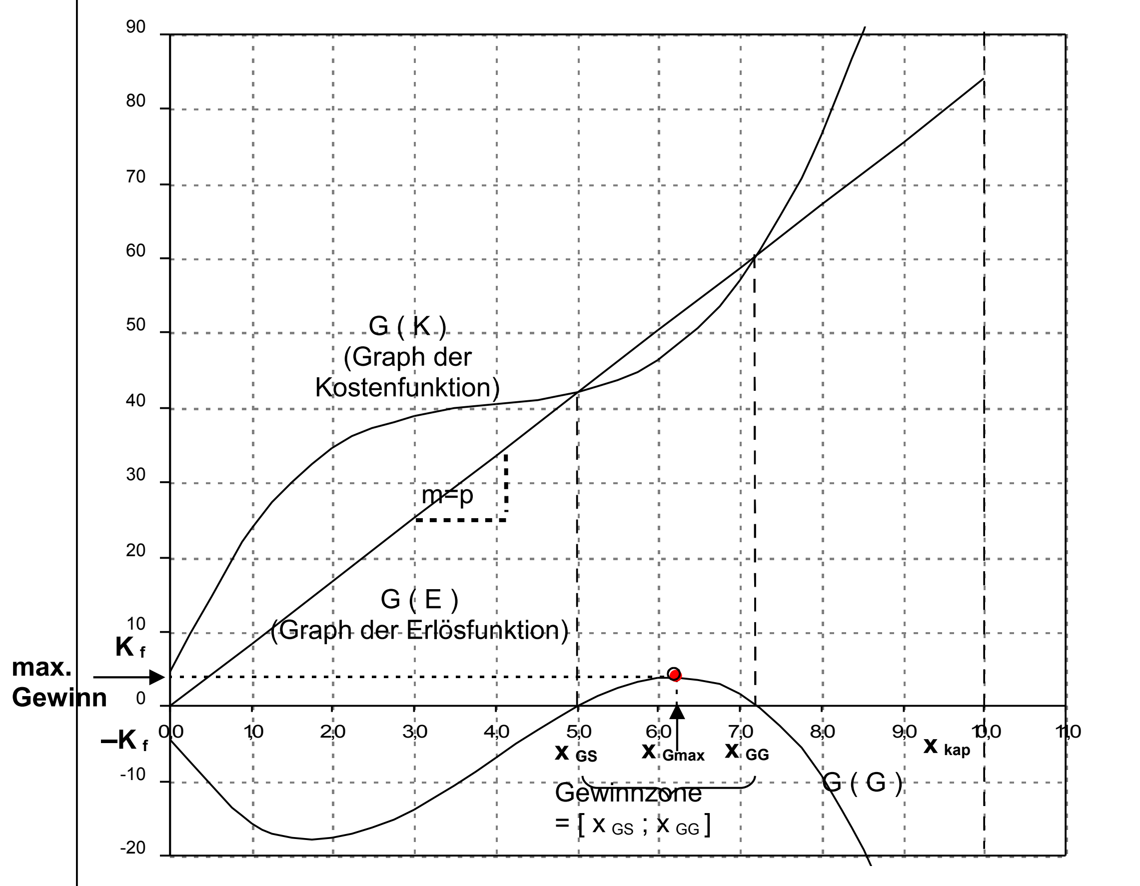
Ökonomische Funktionen im Polypol



Erlösfunktion **E**	Lineare Funktion mit y-Achsenabschnitt 0 und Steigung p (Preis)	$E(x) = 8{,}4\,x$ ($p = 8{,}4$)
Kostenfunktion **K**	Kubische Funktion, überall steigend, y-Achsenabschnitt K_f (Fixkosten)	$K(x)$ $= 0{,}5\,x^3 - 6\,x^2 + 25\,x + 4{,}5$ ($K_f = 4{,}5$)
Gewinnfunktion **G**	$G(x) = E(x) - K(x)$. Kubische Funktion mit negativem y-Achsenabschnitt ($-K_f$) und in der Regel zwei positiven Nullstellen (x_{GS} und x_{GG}).	$G(x)$ $= -0{,}5\,x^3 + 6\,x^2 - 16{,}6\,x - 4{,}5$

Ökonomische Funktionen – Aufgabentypen und Lösungsansatze (Polypol und Monopol)

Klassische Aufgabentypen ohne Differentialrechnung

Preisabsatzfunktion aufstellen im Fall eines <u>Monopols</u> (maximaler Preis b und maximale Absatzmenge x_{ma} gegeben) *Achtung: nicht maximale Absatzmenge und gewinnmaximale Ausbringungsmenge verwechseln*	$p(x) = m \cdot x + b$, wobei $m < 0$. b ist der maximale Preis. Die maximale Absatzmenge x_{ma} ist die Nullstelle von p. Ansatz zur Errechnung von m: $m\, x_{ma} + b = 0$.
Erlösfunktion aufstellen im Fall eines Polypols (p gegeben)	$E(x) = p\,x$ *(linear, Ursprungsgeradenstück)*
Erlösfunktion aufstellen im Fall eines <u>Monopols</u> (p gegeben)	$E(x) = p(x) \cdot x = (m\,x + b)\,x = m\,x^2 + b\,x$ *(quadratisch, Parabel durch den Ursprung, nach unten geöffnet)*
Gewinnfunktion aufstellen (wenn E und K gegeben)	$G(x) = E(x) – K(x)$ *Achtung: Klammern setzen!*
Andere Möglichkeiten, Funktionsgleichungen aufstellen: Siehe Steckbriefaufgaben	
Gewinnschwelle und Gewinngrenze (x_{GS} und x_{GG}, Nullstellen von G)	$G(x) = 0$ (oder: $E(x) = K(x)$) *Lösung der Gleichung mit Horner-Achema bzw. Polynomdivision. Die beiden positiven Lösungen sind Gewinnschwelle (die kleinere) und Gewinngrenze (die größere)*
Gewinnzone	$G(x) = 0$ (s.o.); Gewinnzone: $[x_{GS}; x_{GG}]$
Kosten berechnen (bzw. Erlös oder Gewinn/Verlust) bei gegebener Ausbringungsmenge von x_0 M.E.	Einsetzen: $K(x_0)$ (bzw. $E(x_0)$ oder $G(x_0)$)
Ausbringungsmenge berechnen bei gegebenen Kosten, Erlös oder Gewinn/Verlust) von y_0 G.E.	$K(x) = y_0$ lösen (bzw. $E(x) = y_0$ oder $G(x) = y_0$) *Lösung der Gleichung je nachdem linear oder mit quadratischer Ergänzung oder Polynomdivision*

Anwendungen Differentialrechnung: Erlösmaximierung im Monopol

erlösmaximale Ausbringungsmenge (x_{Emax}) und maximalen Erlös berechnen im Fall des <u>Monopols</u>	<u>1. Möglichkeit</u>: maximale Absatzmenge (zweite Nullstelle der Erlösfunktion) ist bekannt: $x_{Emax} = x_{ma} / 2$ <u>2. Möglichkeit</u>: mit Differentialrechnung: <u>erlösmaximale Ausbringungsmenge</u>: notwendige Bedingung: $E'(x) = 0$ hinreichende Bedingung: $E'(x) = 0 \wedge E''(x) < 0$ (Bed. für Maximalstelle) Einsetzen von x in E´´ zur Überprüfung, ob das Ergebnis negativ ist – Hinweis: E ´´ ist eine Konstante! Damit ist x_{Emax} berechnet. <u>maximaler Erlös</u>: Einsetzen in E: $E(x_{Emax})$

Anwendungen Differentialrechnung: Gewinnmaximierung

Grenzkostenfunktion K ´ aufstellen, d.h. K ableiten	Wenn K die Gleichung $K(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ hat, so gilt: $K´(x) = 3a x^2 + 2b x + c$.
Grenzgewinnfunktion G ´ aufstellen, d.h. G ableiten	Wenn G die Gleichung $G(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ hat, so gilt: $G´(x) = 3a x^2 + 2b x + c$.
gewinnmaximale Ausbringungsmenge x_{Gmax} und maximalen Gewinn berechnen	<u>gewinnmaximale Ausbringungsmenge</u>: notwendige Bedingung: $G´(x) = 0$ In der Regel erhält man zwei Lösungen x_1 und x_2 für diese Gleichung. Oft ist $x_1 < 0$ und muss daher nicht weiter untersucht werden. hinreichende Bedingung: $G´(x) = 0 \wedge G´´(x) < 0$ (Bed. für Maximalstelle) Einsetzen von x_2 in G´´ zur Überprüfung, ob das Ergebnis negativ ist. Damit ist x_{Gmax} berechnet. <u>maximaler Gewinn</u>: Einsetzen in G: $G(x_{Gmax})$
weitere Aufgabentypen: *Siehe Steckbriefaufgaben*	

weitere Kostenfunktionen: ausgehend von der (Gesamt-)Kostenfunktion
$K(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$, wobei $d = K_f$

Grenzkostenfunktion K ´	$K´(x) = 3a x^2 + 2b x + c$. *Wissenswertes über der Grenzkostenfunktion: Ihre Minimalstelle ist die Wendestelle von K,* *ihre Schnittstelle mit k_v ist das Betriebsminimum,* *ihre Schnittstelle mit k ist das Betriebsoptimum.*
variable (Gesamt-)kostenfunktion K_v	$K_v(x) = a x^3 + b x^2 + c x$. *(Grad 3, geht durch den Ursprung)*
variable Stückkostenfunktion k_v	$k_v(x) = a x^3 + b x^2 + c x$. *(quadratisch, nach oben geöffnet)* *Wissenswertes über k_v : Ihre Minimalstelle ist das Betriebsminimum, ihr minimaler Wert die kurzfristige PUG.*
Stückkostenfunktion k	$k(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d/x$. *(gebrochen-rational, die y-Achse ist Asymptote)* *Wissenswertes über k : Ihre Minimalstelle ist das Betriebsopzimum, ihr minimaler Wert die langfristige PUG.*
Betriebsminimum x_{BM} und kurzfristige Preisuntergrenze *ökonom. Bedeutung: sinkt der Preis (auch nur kurzfristig) unter die kurzfristige PUG, so muss zur Verlustminimierung die Produktion eingestellt werden.*	<u>1. Möglichkeit:</u> k_v minimieren: notwendige Bedingung: $k_v´(x) = 0$. hinreichende Bedingung: $k_v´(x) = 0 \wedge k_v´´(x) > 0$ Die so berechnete Stelle ist x_{BM} . kurzfr. PUG = $k_v(x_{BM})$ <u>2. Möglichkeit:</u> Schnittpunkt von K ´ und k_v berechnen: $K´(x) = k_v(x)$ Ergebnis in k_v einsetzen (oder in K ´)
Betriebsoptimum x_{BO} und kurzfristige Preisuntergrenze *ökonom. Bedeutung: sinkt der Preis unter die langfristige PUG, so kann kein Gewinn mehr erzielt werden.*	<u>1. Möglichkeit:</u> k minimieren (Schwierigkeit: Ableitungen von k: $k(x) = a x^2 + b x + c + d/x$ $k´(x) = 2a x + b – d/x^2$ $k´´(x) = 2a + 2d/x^3$) notwendige Bedingung: $k´(x) = 0$. hinreichende Bedingung: $k´(x) = 0 \wedge k´´(x) > 0$

	Die so berechnete Stelle ist x_{BO} . langfr. PUG = k (x_{BO}) <u>2. Möglichkeit:</u> Schnittpunkt von K ´ und k berechnen: K ´(x) = k (x) Ergebnis in k einsetzen (oder in K ´)