

Übersicht Ableitungsregeln

Faktorregel der Differentialrechnung

$$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Beispiel 1: Bekannt ist, dass die Ableitung von u mit $u(x) = x^{10}$ folgende Gleichung hat: $u'(x) = 10x^9$. Dann sagt einem die Faktorregel, dass die Ableitung von f mit $f(x) = -2x^{10}$ die Gleichung $f'(x) = -2 \cdot 10x^9 = \underline{-20x^9}$ haben muss.

Beispiel 2: Es gilt: Die Ableitungsfunktion der Sinus-Funktion ist die Cosinus-Funktion, also: $u(x) = \sin(x)$, dann ist $u'(x) = \cos(x)$.
Aus der Faktorregel folgt nun: die Ableitung von $0,5 \sin(x)$ ist $\underline{0,5 \cos(x)}$.

Summenregel der Differentialrechnung

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Beispiel 1: $f(x) = x^5 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \underline{5x^4 + 2x}$

Beispiel 2: $f(x) = \sin(x) + x^6 \Rightarrow f'(x) = \underline{\cos(x) + 6x^5}$

Potenzregel der Differentialrechnung

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel 1: Potenzfunktionen: Der Exponent ist eine natürliche Zahl:
 $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

Beispiel 2: einfacher gebrochen-rationale Funktionen: Der Exponent ist eine negative Zahl
Zahl:

$$f(x) = \frac{1}{x^7} = x^{-7} \Rightarrow f'(x) = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$$

Beispiel 3: Wurzelfunktionen: Der Exponent ist der Kehrwert einer natürlichen Zahl:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Beispiel 4 (zusammen mit Summenregel):

$$f(x) = 10x^4 - 6x^3 + x - 4 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 10 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 3x^2 + 1 - 3 \frac{1}{x^3}$$

$$= 40x^3 - 18x^2 + 1 - \frac{3}{x^3}$$

Übungsaufgaben: [ab_potenzregel_differentialrechnung.pdf](#)

Kettenregel

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$



Beispiel 1: $f(x) = (2x + 3)^{12}$,
 also $u(x) = x^{12} \Rightarrow u'(x) = 12x^{11}$
 $v(x) = 2x + 3 \Rightarrow u'(x) = 2$
 $f'(x) = 12 \cdot (2x + 3)^{11} \cdot 2 = 24(2x + 3)^{11} \cdot 2$

Beispiel 2: $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$.

Übungsaufgaben: [Übungen Kettenregel Differentialrechnung](#)

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel 1: $f(x) = x^5 \cdot (x^2 - 3x)$
 $\Rightarrow f'(x) = 5x^4 \cdot (x^2 - 3x) + x^5 \cdot (2x^2 - 3)$

Anmerkung: Für dieses Beispiel hätte man nun keine neue Regel gebraucht, sondern besser ausmultipliziert.

Beispiel 2: $f(x) = x^5 \cdot \sin(x)$
 $\Rightarrow f'(x) = 5x^4 \cdot \sin(x) + x^5 \cdot \cos(x)$.

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$;
 $u(x) = 3x$; $u'(x) = 3$
 $v(x) = x^2 + 1$; $v'(x) = 2x$
 $f'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$

