# Übersicht Begriffe und Aufgabentypen Ganzrationale Funktionen

| | |
|---|---|
| **Funktionsgleichung gegeben** (Normalform) | $\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$, dabei sind $a_n, \ldots, a_0$ irgendwelche Zahlen, nur $a_n$ darf nicht Null sein (Leitkoeffizient) |
| **Funktionsgleichung gegeben** (faktorisierte Form, Zerlegung in Linearfaktoren) | $\mathbf{f(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}}$, dabei sind $x_1, \ldots, x_k$ die Nullstellen von f, die Exponenten geben ihre Vielfachheit an, also ob es sich z.B. um doppelte Nullstellen handelt. **Hinweis**: Es können auch quadratische Terme als Faktoren „übrig bleiben“, die keine Nullstellen haben und sich daher nicht weiter faktorisieren lassen. |
| Grad von f | n (also der höchste Exponent in der Normalform) |
| Leitkoeffizient von f | $a_n$ |
| Absolutglied bzw. y-Achsenabschnitt | Null einsetzen: $f(0) = a_0$ |
| Funktionswert von f an der Stelle $x_0$ | $f(x_0)$ ausrechnen – also $x_0$ einsetzen |
| Stelle, an der f den Wert $y_0$ annimmt | $f(x) = y_0$ lösen |
| Punktprobe, ob $(x_0 \mid y_0)$ auf dem Graph von f liegt | $f(x_0)$ ausrechnen und sehen, ob $y_0$ herauskommt |
| **Differentialrechnung** (alles, was mit Steigung des Graphen zu tun hat) | |
| erste Ableitung(sfunktion) ( $f'$ ) | $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $\Rightarrow f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$ <br><br> (Potenzregel) |
| zweite und höhere Ableitungen ( $f''$, ... ) | $f'$ entsprechend oft weiter ableiten. $f''(x) =$ $n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + (n-2) \cdot (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + a_2$ |

| | |
|---|---|
| Steigung von f an der Stelle $x_0$ | $x_0$ in $f'$ einsetzen: $f'(x_0)$ |
| Stelle, an der f die Steigung $m_0$ hat | $f'(x) = m_0$ lösen |
| Gleichung der Tangenten an der Stelle $x_0$ aufstellen | $t(x) = m x + b$<br>$x_0$ in $f'$ einsetzen: $m = f'(x_0)$<br>b bestimmen mit Hilfe der folg. Gleichung:<br>$m x_0 + b = f(x_0)$ |
| Steigungsverhalten (Monotonieverhalten) untersuchen | Vorzeichentabelle der ersten Ableitung.<br><br>$f'(x) > 0$ auf $[a ; b] \Rightarrow$ f steigt dort<br><br>$f'(x) < 0$ auf $[a ; b] \Rightarrow$ f fällt dort |
| Krümmungsverhalten untersuchen | Vorzeichentabelle der zweiten Ableitung.<br><br>$f''(x) > 0$ auf $[a ; b] \Rightarrow$ f steigt dort<br><br>$f''(x) < 0$ auf $[a ; b] \Rightarrow$ f fällt dort |
| **Kurvendiskussion**<br>(Funktionsuntersuchung unter allen Aspekten) | |
| maximale Definitionsmenge $D_{max}$ | $D_{max} = \mathbb{R}$ |
| Nullstellen | $f(x) = 0$ lösen |
| Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems ($S_{x1}$, ..., $S_{xk}$, $S_y$) | y-Achsenabschnitt b ablesen, $S_y(0 ; b)$<br>Nullstellen $x_1$, ..., $x_k$ berechnen ( es kann höchstens n geben) und als Punkt ausdrücken ($S_{x1}(x_1 ; 0)$ usw. ...) |
| lok. Extrempunkte<br><br>( lok. HP ( x ; y ) ; lok. TP ( x ; y )<br><br>und Sattelpunkte | notw. Bed.: $f'(x) = 0$,<br><br>Lösungen dieser Gleichung sind mögliche Extremstellen<br><br>hinreichende Bed.:<br>$f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$<br>alternativ: Überprüfung mit VZW-Kriterium<br><br>( Vorzeichentabelle von $f'$)<br><br>Berechnung der y-Koordinate durch Einsetzen in f |

| | |
|---|---|
| Wendepunkte ( W.P. ( x ; y ) ) | notw. Bed.: $f''(x) = 0$,<br><br>Lösungen dieser Gleichung sind mögliche Wendestellen<br><br>hinreichende Bedingung:<br>$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$<br>alternativ: Überprüfung mit VZW-Kriterium<br><br>( Vorzeichentabelle von f ´ )<br><br>Berechnung der y-Koordinate durch Einsetzen in f |
| besondere Punkte von f | Schnittpunkt mit der y-Achse, Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte, Sattelpunkte, Wendepunkte |
| Symmetrie zum Koordinatensystem | In der Normalform treten nur gerade Exponenten auf ⇔ Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse;<br><br>In der Normalform treten nur ungerade Exponenten auf ⇔ Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung |
| Fernverhalten Grenzwerte für x gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ | positiver Leitkoeffizient ⇔ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$<br><br>negativer Leitkoeffizient ⇔ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$<br><br>gerader Grad ⇔ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$<br>gerader Grad ⇔ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ |
| Schnittpunkte von zwei Funktionen f und g ($S_{fg}$ ) | f ( x ) = g ( x ) lösen,<br>Lösung in f oder g einsetzen |
| Graph zu Funktionsgleichung zeichnen | Besondere Punkte einzeichnen und mit deren Hilfe Graph zeichnen; eventuell eine erweiterte Wertetabelle zu Hilfe nehmen. |
| | |
| **Funktionsgleichung aufstellen** | |
| 1. Fall: Normalform aufstellen aus faktorisierter Form | Klammern ausmultiplizieren |

| | |
|---|---|
| 2. Fall: Steckbriefaufgabe. Dabei müssen so viele Angaben aus der Aufgabe verwendet werden, wie Parameter zu bestimmen sind. (gegeben sind z.B. vier Punkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ und $P_4(x_4; y_4)$ auf dem Graph einer Funktion vom Grad 3) | <u>1. Schritt: Ansatz</u>:<br>Gesucht ist z.B. die *Gleichung einer Funktion vom Grad 3*<br>$\Rightarrow$Ansatz:<br>$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$<br><br>Gesucht ist z.B. die *Gleichung einer Funktion vom Grad 4 achsensymmetrisch zur y-Achse*<br>$\Rightarrow$Ansatz: $f(x) = a x^4 + b x^2 + c$<br><br><u>2. Schritt: Gleichungen aufstellen</u><br>z.B. mit Hilfe *angegebener Punkte* $(x_1; y_1)$ oder (was dasselbe ist) Stellen und zugehöriger Werte oder einer Wertetabelle:<br>$f(x_1) = y_1$, d.h. z.B.:<br>$a \cdot x_1^3 + b \cdot x_1^2 + c \cdot x_1 + d = y_1$ usw.<br>oder mit Hilfe *angegebener Extrema oder Wendestellen*<br><br>z.B. der Angabe *Extremstelle bei $x_1$:*<br>$f'(x_1) = 0$, d.h. z.B. $3a \cdot x_1^2 + 2b \cdot x_1 + c = 0$ usw.<br><u>3. Schritt: Gleichungssystem lösen</u>, dazu z.B. wenn a, b und c gesucht sind, mit Additionsverfahren erst c eliminieren (man erhält zwei Gleichungen mit a und b), dann b eliminieren und a berechnen. Dann einsetzen, um erst b und dann c zu erhalten<br><u>Ergebnis hinschreiben</u>: $f(x) = ...$ |