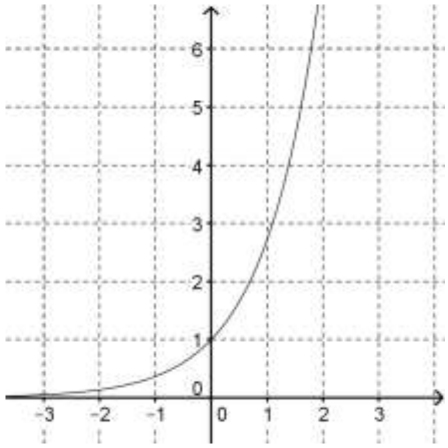
Die e-Funktion e^x und all die anderen e-Funktionen

Die e-Funktion ist eine besondere Exponentialfunktion mit der Gleichung

$$\mathbf{f(x) = e^{x}},$$



wobei e die Eulersche Zahl ist. ($e \approx 2{,}7182818$)

Bezeichnung: Die e-Funktion (auch auf dem Taschenrechner) wird häufig mit „exp" bezeichnet.

Die entscheidende Eigenschaft der e-Funktion ist ihre Benutzerfreundlichkeit beim Ableiten:

$$\mathbf{f'(x) = e^{x}}$$

Die e-Funktion und ihre Vielfachen sind die einzigen Funktionen, die gleich ihrer eigenen Ableitung sind.

Weitere Eigenschaften:
Definitionsmenge: $D_{max}(\exp) = \mathbb{R}$;
Wertemenge: $W(\exp) = \mathbb{R}_{>0}$, d.h. die e-Funktion nimmt keine negativen Werte an und hat auch keine Nullstellen.
Achsenschnittpunkte:
mit der x-Achse: keine (s.o.)
mit der y-Achse: $S_y(0 ; 1)$, da $e^0 = 1$.

Steigung/Extrema: streng monoton steigend, keine Extrema,
Krümmung/Wendepunkte: überall linksgekrümmt, keine Wendepunkte;

Verhalten für betraglich große x („Fernverhalten"):
Die x-Achse ist Asymptote, der Grenzwert für x gegen $-\infty$ ist nämlich 0;
Der Grenzwert für x gegen unendlich ist unendlich, dabei steigt die e-Funktion schließlich stärker als jede ganzrationale Funktion.

Zusammenhang zwischen allgemeinen Exponentialfunktionen und e-Funktionen

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^{x}$. Da e-Funktionen teilweise leichter zu handhaben sind, könnte es sinnvoll sein, f durch eine e-Funktion darzustellen. Dabei gilt:

$$\boxed{\mathbf{c \cdot a^{x} = c \cdot e^{\ln(a) \cdot x}}.}$$

Umgang mit e-Funktionen, Umformungen, Lösen von Gleichungen

Es gelten die Potenz-Regeln, z.B. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x+1} = e^x \cdot e^1 = e^x \cdot e$, $e^{4x} = (e^x)^4$

Zum Lösen von Exponentialgleichungen logarithmiert man beide Seiten:
z.B.:
$e^{-2x+5} = 10 \quad |\ \ln$
$\Leftrightarrow -2x + 5 = \ln(10) \approx 2{,}3026 \ |\ -5$
$\Leftrightarrow -2x \approx -2{,}6974 \quad |\ :(-2)$
$\Leftrightarrow x \approx \underline{\underline{1{,}3482}}$

e-Funktionen im weiteren Sinne

Funktionen, in deren Term die e-Funktionen auftritt, werden ebenfalls als e-Funktionen bezeichnet.

Gleichungen lösen
Gleichungen des Typs $(3x + 15) \cdot e^{-2x+5} = 0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt.

Beispiel: $(3x + 15)\, e^{-2x+5} = 0 \Leftrightarrow 3x+15 = 0 \vee e^{-2x+5} = 0$ (zweite Gleichung ist unlösbar)
$\Leftrightarrow 3x+15 = 0 \Leftrightarrow 3x = -15 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{-5}}$.

Ableitungen
Ihre Ableitungen werden mit Hilfe der entsprechenden Regeln (insbes. Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel) ermittelt.

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel: $f(x) = (3x + 15) \cdot e^x$,
also $u(x) = 3x + 15$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$,
$f'(x) = 3 \cdot e^x + (3x + 15) \cdot e^x = (3 + 3x + 15) \cdot e^x = \underline{\underline{(3x + 18) \cdot e^x}}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beispiel: $f(x) = e^{-2x+5}$,
also $v(x) = -2x+5$ (Bei solchen e-Funktionen ist die innere Funktion in der Regel der Exponent), $v'(x) = -2$
$u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, (Bei solchen e-Funktionen ist die äußere Funktion und damit auch die äußere Ableitung in der Regel e^x)
$f'(x) = e^{-2x+5} \cdot (-2) = \underline{\underline{-2\, e^{-2x+5}}}$.

Beides zusammen

Beispiel: $f(x) = (3x + 15) \cdot e^{-2x+5}$
$f'(x) = 3e^{-2x+5} + (3x + 15) \cdot e^{-2x+5} \cdot (-2)$
$= 3e^{-2x+5} + (-6x - 30) \cdot e^{-2x+5} = (3 - 6x - 30) \cdot e^{-2x+5} = \underline{\underline{(-6x - 27) \cdot e^{-2x+5}}}$

Übungen zum Ableiten

Integration einfacher e-Funktionen:

Funktionen des Typs $f(x) = c \cdot e^{mx+b}$ lassen sich leicht integrieren:

Eine Stammfunktion ist $F(x) = c \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{mx+b} = \frac{c}{m} \cdot e^{mx+b}$.

Beispiel: $f(x) = -3 \cdot e^{-2x+5}$

$F(x) = -3 \cdot (-\frac{1}{2})\, e^{-2x+5} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\, e^{-2x+5}}}$

Übungen zur Integration