Exponentielles Wachstum und Exponentialfunktionen

Def.: Unter einer Exponentialfunktion (im engeren Sinne) versteht man eine Funktion der Bauart:

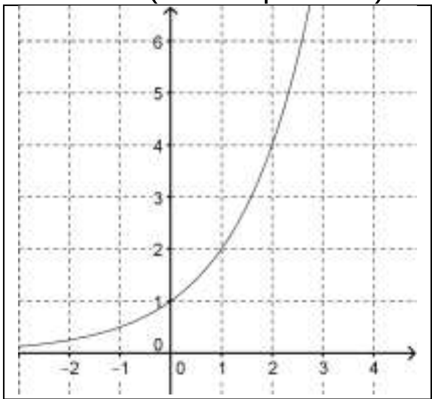
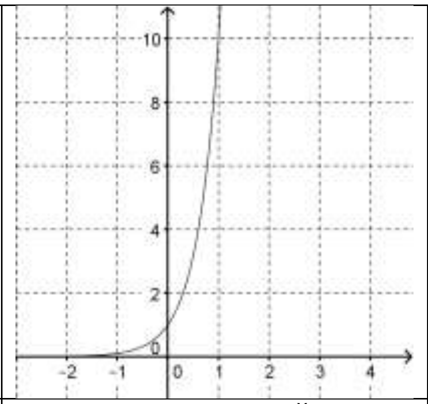
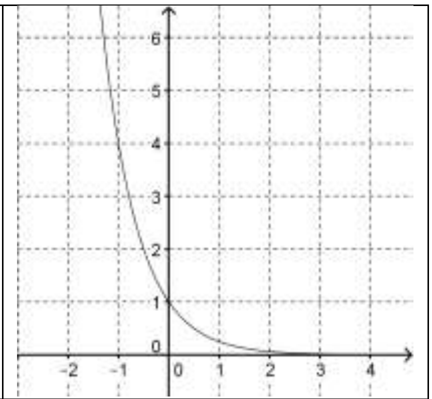
$$\boldsymbol{f\,(\,x\,)\;=c\;\cdot a^{x}}$$

wobei die Basis a positiv sein muss und der Anfangswert $c \neq 0$.

Anwendungen: **Wachstums- und Zerfallsprozesse**

z.B. Bevölkerungswachstum, Wachstum von Tier- oder Pflanzenpopulationen, Bakterienkulturen, Verbreitung von Krankheiten oder Gerüchten, Abbau bestimmter Stoffe im Körper.
<u>physikalische Anwendungen</u>: z.B. radioaktiver Zerfall, Kettenreaktionen, Lichtstärke bei der Durchdringung von Farbschichten, …
<u>ökonomische Anwendungen</u>: Zinseszinsrechnung (und degressive Abschreibung)
Dabei steht $\boldsymbol{x}$ meist für die Zeit (weswegen statt x oft auch t (für time) benutzt wird) $\boldsymbol{c}$ für die Ausgangsmenge oder den Startwert (zum Zeitpunkt 0) und $\boldsymbol{a}$ für den Faktor, der angibt <u>auf</u> das Wievielfache die Menge in einer Zeiteinheit anwächst oder sinkt. (***Achtung***: nicht verwechseln mit der Größe, <u>um</u> die Ausgangsmenge angewachsen bzw. gesunken ist: Ein Wachstum <u>um</u> 27% bedeutet ein Wachstum <u>auf</u> 127%, entspricht also dem Faktor 1,27. Der Wachstumsfaktor ist dann 1,27, die Wachstumsrate aber 0,27)

Bemerkung: Ist $a > 1$, so steigt die Funktion (Wachstumsprozess), ist $a < 1$, so fällt sie (Zerfallsprozess).

		
$f_1(x) = 2^x$	$f_2(x) = 10^x$	$f_3(x) = 0{,}25^x$

LORE LORENTZ SCHULE

Gegenüberstellung lineares Wachstum – exponentielles Wachstum

<table>
<tr><th>lineares Wachstum</th><th>exponentielles Wachstum</th></tr>
<tr><td>Eine Größe wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Wert m (d.h., derselbe Wert wird addiert).</td><td>Eine Größe wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Faktor a.</td></tr>
<tr><td>Die Steigung ist überall gleich.</td><td>Die Steigung ist erst ganz schwach, dann immer stärker und übersteigt schließlich das menschliche Vorstellungsvermögen.
Für jede noch so stark steigende ganzrationale Funktion gilt: es gibt immer irgendeine Stelle, ab der die Exponentialfunktion noch stärker steigt und sich nicht mehr einholen lässt.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>b</td><td>m+b</td><td>2m+b</td><td>3m+b</td></tr><tr><td></td><td></td><td>+m</td><td>+m</td><td>+m</td></tr></table>Dabei bezeichnet b den y-Achsenabschnitt und m die Steigung.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>c</td><td>c·a</td><td>$a \cdot b^2$</td><td>$a \cdot b^3$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>·a</td><td>·a</td><td>·a</td></tr></table>Dabei bezeichnet a den Anfangswert (und y-Achsenabschnitt), c die Basis der Exponentialfunktion (also den Vervielfachungsfaktor in einer „Zeiteinheit“).</td></tr>
<tr><td>Differenzengleichheit: f (x+1) – f (x) = m</td><td>Quotientengleichheit: $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ = a</td></tr>
</table>

Anwendungsbeispiel 1: Zinseszinsrechnung

Aufgabe: Ein Kapital von 2000 € wird zu 4,5% verzinst. Wie hoch ist das Guthaben nach 8 Jahren?

Bezeichnung: K (x) : Kapital nach x Jahren; Funktionsgleichung: $K(x) = 2000 \cdot 1{,}045^{x}$.

Gesucht: K (8)

$K(8) = 2000 \cdot 1{,}045^{8} = \underline{\underline{2844{,}20}}$.

A.: Nach 8 Jahren ist das Guthaben auf 2844,20 € angewachsen.

Beispiel: Berechnung des Restbuchwerts bei (geometrisch degressiver Abschreibung: hier

Anwendungsbeispiel 2: radioaktiver Zerfall

Radioaktives Iridium-195 zerfällt so schnellt, dass bereits nach einer Stunde ca. 24,21% zerfallen sind. Wenn in einem Labor 3 Mengeneinheiten (ME) Iridium-195 hergestellt werden, welche Menge ist dann nach 2,5 Stunden noch vorhanden?

Bezeichnung: I (x) : Menge an Iridium-195 nach x Stunden.

Funktionsgleichung: $I(x) = 3 \cdot 0{,}7579^{x}$ (Da von 100% nach 1 Stunde 24,21 % zerfallen sind, bleiben 100%-24,21% = 75,79% = 75,79/100 = 0,7579 übrig.)

Gesucht: I (2,5)

$I(2{,}5) = I(x) = 3 \cdot 0{,}7579^{2{,}5} \approx \underline{\underline{1{,}5}}$.

A: Nach 2,5 Stunden sind noch 1,5 ME Iridium-195 vorhanden. (Bemerkung: Das ist genau die Hälfte der ursprünglichen Menge. Die Halbwertszeit von Iridium-195 beträgt demnach 2,5 Stunden.)

Berechnung der Basis a:

Anwendungsbeispiel 3:

Eine Bakterienkultur von anfangs 2800 Bakterien vermehrt bei optimalen Wachstumsbedingungen innerhalb eines Tages auf 716800. Stellen Sie das entsprechende Wachstumsgesetz (also die Funktionsgleichung) auf, wobei B (x) die Bakterienanzahl nach x Stunden ist.

$B(x) = 2800\, a^{x}$.

Gesucht: a.

$B(12) = 2800\, a^{24} = 716800 \mid : 2800$

$\Leftrightarrow a^{24} = 256 \mid \sqrt[24]{\ }$ (keine negative Lösung, da a >0 sein muss.)

$\Leftrightarrow a \approx 1{,}2599$

$B(x) = \underline{\underline{2800 \cdot 1{,}2599^{x}}}$.

Beispiel: Berechnung des Zinssatzes: hier

Berechnung des Exponenten bzw. der Zeit x:

Die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = c$ heißt „Logarithmus von c zur Basis a“, in Kurzform $\log_a(c)$.
Also ist 5 der Logarithmus von 100 000 zur Basis 10 (, da man 10 hoch 5 nehmen muss, um 100 000 zu erhalten,)
und 3 ist der Logarithmus von 8 zur Basis 2.
In viele Taschenrechner kann man den Logarithmus zu einer gewünschten Basis direkt eingeben. Bei anderen berechnet man ihn nach der folgenden Formel:

$$\log_a(c) = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}.$$

Beispiel: $\log_{1,05}(1{,}47745544) = \frac{\ln(1{,}47745544)}{\ln(1{,}05)} \approx 8.$

Anwendungsbeispiel 4:

Wie lange dauert es, bis sich die Bakterienkultur aus Anwendungsbeispiel 3 bei optimalen Bedingungen verdoppelt (also die durchschnittliche Zeit bis zur Zellteilung)?
$B(x) = 2800 \cdot 1{,}5874^x = 5600 \mid : 2800$
$\Leftrightarrow 1{,}5874^x = 2 \mid \log_{1,5874}$
$\Leftrightarrow x = \log_{1,5874}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}5874)} \approx \underline{\underline{1{,}5}}.$
A: Die Bakterienanzahl verdoppelt sich etwa alle anderthalb Stunden.

Beispiel: Berechnen der Zeit in einer Zinseszinsaufgabe: hier

Bem.: Jede Exponentialfunktion lässt sich auch auf Basis der natürlichen Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ darstellen.
Genauer: statt a^x kann man mit e^{kx} arbeiten. Mehr darüber kann man hier erfahren.

Anwendungsbeispiele Exponentialfunktionen und radioaktiver Zerfall: Uni Darmstadt