Funktionen: Lackbeispiel

[1] Reuters, www.faz.net/aktuell/wirtschaft/unternehmen/taschenmesser-wir-bringen-etwas-schweiz-in-die-welt-1582442/messerproduktion-bei-1584148.html#fotobox_1_582442

In einem Werk für Taschenmesser wird rund um die Uhr produziert. Pro Stunde verlassen 100 Messer das Band. Zuletzt wird der Griff mit einer schützenden Lackschicht überzogen. Für 100 Messer werden ¾ Liter Lack verbraucht. Im Moment sind 60 Liter des Lacks in der Produktionshalle vorrätig – mehr kann hier wegen Platzmangels auch nicht gelagert werden. Zunächst ist nicht vorgesehen, neuen Lack aus dem etwas entfernten Lager herbeizuholen. Du bist nun als Produktionsleiter unter anderem dafür zuständig, dass genug Lack vorhanden ist, und willst dir einen Überblick über den Bestand der nächsten Zeit verschaffen.

Aufgabe 1

a) Wie viel Lack ist nach 6 Stunden noch vorhanden?

b) Lege eine Tabelle darüber an, wie viel Lack nach 10, 20, 30 und 40 Stunden vorhanden ist und zeichne die entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem ein (10 Längeneinheiten (LE) = 1 cm).

c) Was ergibt sich, wenn man eine Linie durch die Punkte zieht? Kann man die dadurch neu hinzugekommenen Punkte sinnvoll interpretieren?

d) Lies aus dem Graph ab, wann ist der Lack komplett aufgebraucht ist.

e) Du willst zu jedem beliebigen Zeitpunkt ohne Umwege berechnen können, wie groß der Lackbestand dann sein wird. Dazu benötigst du eine Formel, in der die Zeit (in Stunden von jetzt an gerechnet) als Variable x eingeht.

Erläuterungen und Lösungen zu den Aufgaben

Auswertung

Es geht in dem Beispiel um zwei Größen, nämlich Zeit in Stunden und Lackmenge in Litern, die voneinander abhängen, wobei sich die eine aus der anderen direkt berechnen lässt. Anders ausgedrückt: Jedem Zeitpunkt lässt sich eine dazugehörige Lackmenge zuordnen. Mit derartigen Zuordnungen haben wir es in der Mathematik ständig zu tun, weswegen man einen eigenen Begriff dafür geprägt hat: Man nennt sie Funktionen.

Da es sich im vorliegenden Fall um Lackmengen geht, bietet es sich an, die Funktion „l“ zu nennen.
Diejenige Lackmenge, die z.B. nach 12 Stunden noch vorhanden ist, heißt dann einfach „$l(12)$“ (sprich: „l von 12“). Aus der Aussage „Nach 12 Stunden verbleiben 31 Liter Lack“ wird kurz und knapp:

$$l(12) = 31.$$

Dabei wird diejenige Zahl, die in l eingesetzt wird, als „Stelle“ oder als „unabhängige Variabel“ bezeichnet, die Zahl, die man als Rechenergebnis erhält, nennt man „Funktionswert“ oder „abhängige Variable“. Im obigen Fall formuliert man: „Die Funktion l nimmt an der Stelle 12 den (Funktions-)Wert 31 an“ oder „Der Funktionswert von l an der Stelle 12 ist 31“.

Die Gleichung, nach der man den Funktionswert aus der Stelle berechnet, heißt Funktionsgleichung. In unserem Fall lautet sie:

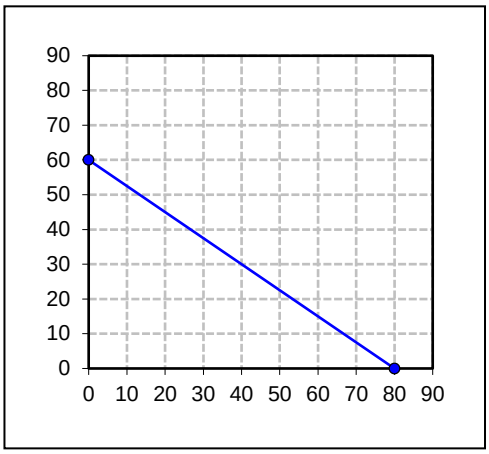
$$l(x) = -\frac{3}{4}x + 60.$$

Das „x“ spielt die Rolle eines Platzhalters für die Stellen.

Die rechte Seite der Gleichung heißt auch Funktionsterm.

Zur **Darstellung von Funktionen** verwendet man häufig Tabellen und Graphen:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$y = l(x)$	60	52,5	45	37,5	30	22,5	15	7,5	0



Jede Darstellung hat ihre Vor- und Nachteile: Bei vielen Funktionen kann man unendlich viele verschiedene Zahlen einsetzen – da kann eine Tabelle immer nur unvollständig sein.

Ein Graph gibt zwar einen sehr anschaulichen Überblick, man kann aber nie ganz genau einzeichnen oder ablesen.

Zusammenfassung

Ein und dieselbe Aussage können wir nun auf verschiedene Arten formulieren:

Sachaussage:	Nach 30 Stunden sind noch 37,5 Liter Lack vorhanden.
Gleichung:	$l(30) = 37{,}5$
Aussage über die Funktion:	Die Funktion l nimmt an der Stelle 30 den Wert 37,5 an.
Aussage über den Graph:	Der Punkt $(30 \mid 37{,}5)$ liegt auf dem Graph von l.

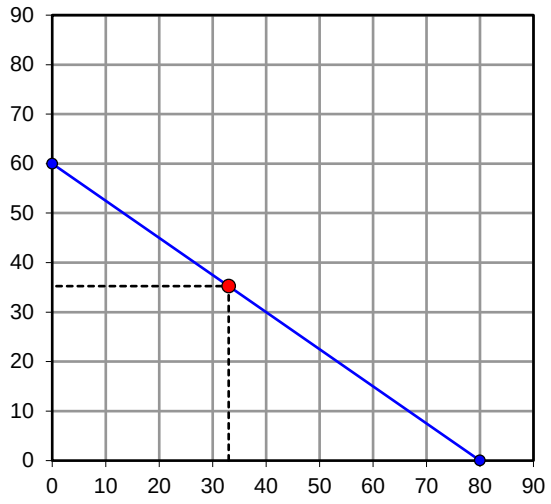
Damit kommt man klar, wenn man ein paar mathematische Vokabeln einprägt und vor allem x und y immer sauber auseinander hält.
Manch einem hilft es bei der Unterscheidung, wenn er im Aufgabentext die Zahlen, die für x stehen, grün markiert und die, die für y stehen, blau.

x	$y = f(x)$
Stelle, das, was man in die Funktion einsetzt	(Funktions-)Wert, das, was herauskommt, wenn man etwas in die Funktion einsetzt
beides zusammen: Der Punkt $(x \mid y) = (x \mid f(x))$ liegt auf dem Graph von f	

Anwendungen

Mit den erarbeiteten Begriffen lassen sich nun Sachprobleme formulieren – und lösen.

Beispiel 1a Die Taschenmesserproduktion erfolgt in drei Schichten am Tag, von denen eine jeweils 8 Stunden dauert. Wie viel Lack ist noch vorhanden, wenn die zweite Schicht des zweiten Tages vor einer Stunde begonnen hat?



Graphische Lösung: Es handelt sich um 24 + 8 + 1 = 33 Stunden. Da die Zeit auf der x-Achse eingetragen ist, markiert man 33 auf der x-Achse, zieht eine senkrechte Linie, bis man auf den Funktionsgraphen trifft. Von diesem Punkt aus geht man waagerecht bis zur y-Achse. $l(33)$ lässt sich nun als Höhe des entsprechenden Punktes auf der y-Achse ablesen: $l(33) \approx 35$.

Man vergleiche mit der rechnerischen Lösung:

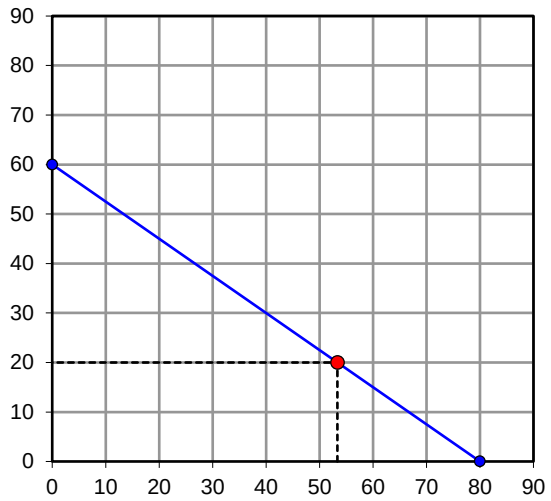
Gegeben: $x = 24 + 8 + 1 = 33$

Gesucht: $l(33)$

Lösung: $l(33) = -\frac{3}{4} \cdot 33 + 60 = 35{,}25$

Antwort: Nach 33 Stunden sind noch 35,25 Liter Lack vorhanden.

Beispiel 1b Wie lange dauert es, bis nur noch 20 Liter Lack da sind?



Graphische Lösung: Die Lackmenge ist ein y-Wert, also geht man von der Zahl 20 auf der y-Achse waagerecht zum Funktionsgraphen und von dort aus senkrecht bis zur x-Achse. Es lässt sich ablesen, dass x demnach etwa bei 53 liegt.

Auch hier zum Vergleich die rechnerische Lösung:

Gegeben: $l(x) = 20$ Gesucht: x

Lösung: $l(x) = 20$

$\Leftrightarrow 60 - \frac{3}{4}x = 20$ | -60

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x = -40$ | :(-3/4) bzw. ·(-4/3)

$\Leftrightarrow x = \frac{160}{3} = 53,\overline{3}$

Antwort: Es dauert 53 $\frac{1}{3}$ Stunden, also 53 Stunden und 20 Minuten, bis nur noch 20 Liter Lack da sind.

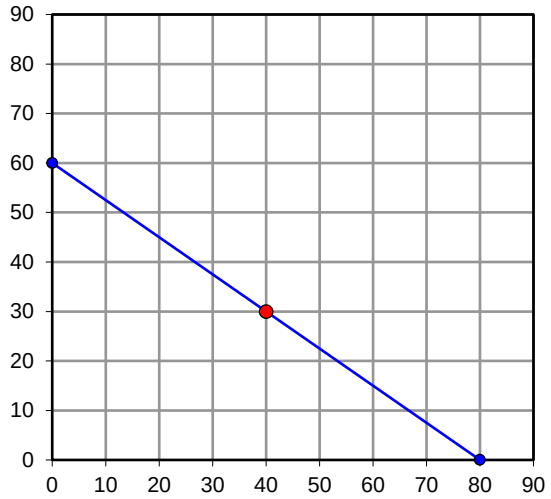
Bemerkung

Offensichtlich ist es entscheidend für den rechnerischen Lösungsansatz, zu erkennen, ob die gegebene Zahl für x oder für y steht.
Ist x gegeben, so lässt sich der zugehörigen Funktionswert recht simpel berechnen, indem man für x einsetzt.
Wenn aber y gegeben ist, so läuft die Aufgabe auf die Lösung einer Gleichung heraus, was entsprechend mehr Aufwand mit sich bringt.

Problem	**Lösungsweg**
Stelle x_0 ist gegeben, y ist gesucht	Funktionswert $f(x_0)$ ausrechnen.

Funktionswert y_0 ist gegeben, x ist gesucht	Die Gleichung $f(x) = y_0$ aufstellen und lösen.

Aufgabe 2



a) Auf dem nebenstehenden Graph von l (aus Bsp. 1) ist der Punkt P_1 markiert. Lies die Koordinaten ab. Formuliere die diesem Punkt entsprechende Sachaussage bezogen auf Zeit und Lackmenge.

b) Überprüfe, ob der Punkt (22 | 45) auf dem Graph von l liegt.

c) Bestimme graphisch den Funktionswert von l an der Stelle 46. Formuliere die Textaufgabe bezogen auf Zeit und Lackmenge, die dieser Fragestellung entspricht.

d) Damit die Produktion nicht etwa wegen Lackmangels ins Stocken gerät, soll spätestens dann, wenn in der Produktionshalle nur noch 9 Liter Lack vorhanden ist, neuer aus dem Lager bestellt werden. Berechne, zu welchem Zeitpunkt das der Fall ist.