Sinus-Funktionen und veränderte Sinus-Funktionen

Das ist die Sinus-Funktion:

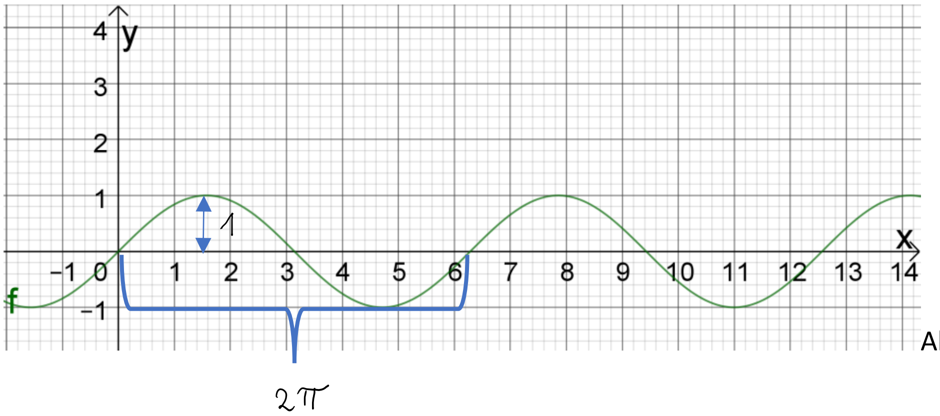


Abb. 1

Ihre grundlegenden Eigenschaften habe die meisten von euch schon herausgearbeitet. ansonsten findest du sie hier (allerdings steht da noch einiges mehr drin, was auf der Differentialrechnung beruht – die kriegen wir später)

Wichtig für uns ist zunächst:

sin hat die Amplitude 1 (stärkste Abweichung von der „Mittellinie“, die hier die x-Achse ist).

Sin hat die Periode 2 π, danach ist sie sozusagen in der „Wiederholungsschleife“ und fängt wieder „von vorne an“, was sich dann bis ins Unendliche wiederholt.

Sie spielt in vielen Teilgebieten der Physik eine Rolle (Elektrotechnik, Optik (Wellencharakter des Lichts), mechanische Schwingungen z.B. bei Pendelbewegungen (mehr dazu findest du bei Leifi).

Hier schauen wir uns ihre Bedeutung wir die Akustik näher an – eigentlich geht´s da auch um Schwingungen: um die der Luft.

Ein gleichbleibender Ton entspricht einer (abgeänderten) Sinus-Kurve:

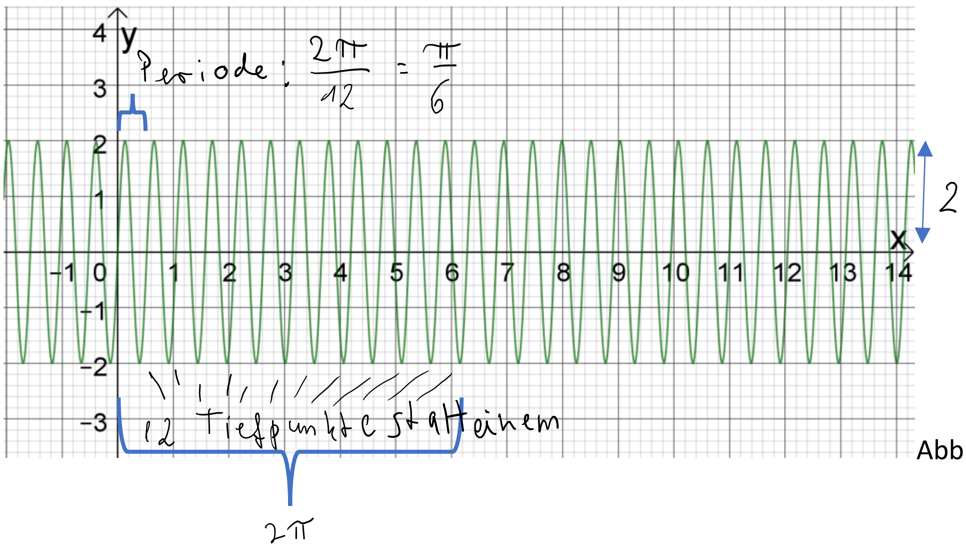
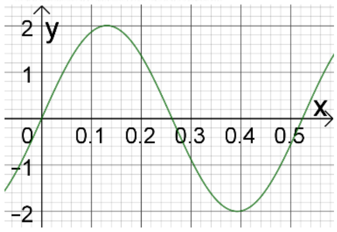


Abb. 2: Graph von f_2

Du siehst zwei Veränderungen gegenüber dem sin (also Abb. 1): die Ausschläge in y-Richtung sind doppelt so stark wie vorher (die Amplitude ist 2). Wenn es sich bei Abb. 1 und 2 um Töne handelt, ist

Ton 2 doppelt so laut. Als mathematische „Operation" ist f_2 gegenüber sin um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt – das ist die Bezeichnungsweise, die du auch schon von Parabeln kennst.
Außerdem oszilliert („schwingt") die Funktion schneller. Wenn man die Periode müsste man „unter der Lupe ansieht" (durch andere Achsenskalierung), sieht man sie ist bei ca. 0,52:



In der Physik ist die Periode die Wellenlänge, aber es geht oft um ihr „Gegenteil": Der Kehrwert der Periode ist die Frequenz:
Periode von sin ist $2\pi \approx 6$ (siehe oben), die Frequenz von sin ist $\frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6}$.
Die Funktion f_2 hat innerhalb des die Periode 2 π dagegen 12 Hoch – und 12 Tiefpunkte.
Es gilt: $f_2(x) = 2\sin(12x)$

Als Ton wäre f_2 doppelt so laut wie die Sinus-Funktion und er ist höher.
Wenn die Einheiten an der x-Achse Hundertstelsekunden sind, durchläuft f_2 ca. 2 Perioden in einer Hundertstelsekunden, also ca. 200 in einer Sekunde. Das entspricht einer Frequenz von ca. 200 Herz.
Die kann man sich hier anhören: 200 Hz

Wenn statt x in der Funktion $12x$ (oder $2x$) eingesetzt wird, staucht es also die Funktion in x-Richtung: die Periode ist nur noch 1/12 von vorher (oder halbiert), die Frequenz ist verzwölffacht (oder verdoppelt).

Wir ändern nun noch etwas und betrachten $f_3(x) = 2\sin(12x - 1{,}2)$: Der Graph ist um 0,1 nach rechts verschoben.

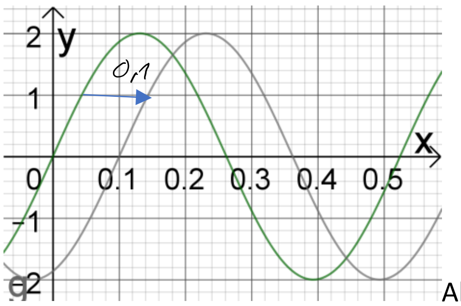


Abb. 4

Warum eigentlich? Das kennen wir schon von der Scheitelpunktform:
Die Parabel $y = (x-7)^2$ hat eine doppelte Nullstelle bei x=7 und ist ausgehend von $y = x^2$ um 7 nach rechts verschoben.
Genauso ist $f_3(x) = 2\sin\big(12(x - 0{,}1)\big) = 2\sin(12x - 1{,}2)$ gegenüber f_2 um 0,1 nach rechts verschoben.
Was bedeutet das für uns akustisch? 0,1 Längeneinheiten sind ja in unserem Beispiel eine Tausendstelsekunde, die der Ton zeitversetzt abgespielt wird. Das hört man gar nicht.

Wichtig ist es nur, wenn mehrere Töne gleichzeitig abgespielt werden:

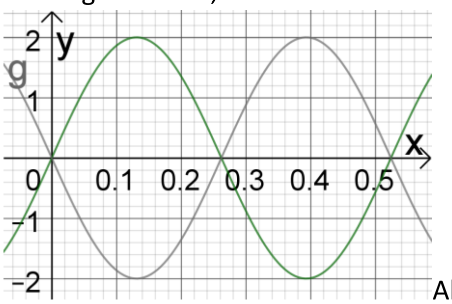


Abb. 5

$f_4(x) = 2\sin\left(12\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin(12x - \pi)$ ist genau eine halbe Periode nach rechts verschoben. Gleichzeitig hat es immer die negativen Werte von f_3.

Der Gesamtton, den man hört, wenn beide Töne erzeigt werden ist $f_3(x) + f_4(x) = 0$, also absolute Stille. Die Töne löschen sich gegenseitig aus.

Mehr zu physikalischen Anwendungen – und Aufgaben zur Sinus-Funktion bei Leifi.

Mehr zum Thema Sinus und Akustik bei physikunterricht-online.de.

Aufgaben

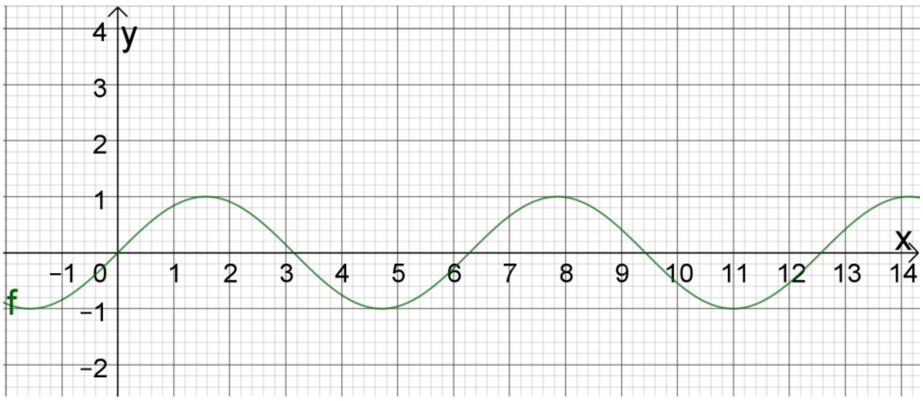
Die folgenden Abbildungen beruhen auf Funktionen im Bogenmaß, nicht im Winkelmaß

a) Zeichne ():

$h_1(x) = 3 \cdot\ sin(x)$ und

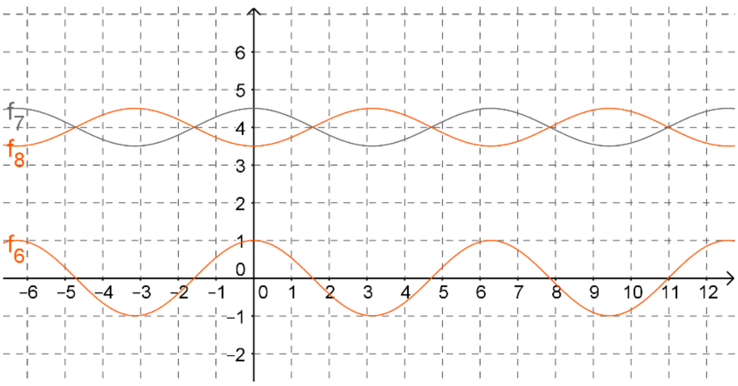
$h_2(x) = sin(x + 1)$ und

$h_3(x) = 2sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$



Kontrolliere danach mit .

b) Ermittle die Gleichungen



$f_6(x) =$_______________ $f_7(x) =$_______________

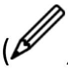
$f_8(x) =$_______________

c) f_8 geht aus f_6 hervor durch folgende geometrische Operationen[1]:

d) Entscheide begründet, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

A: $sin(x) = cos(x + \frac{\pi}{2})$; B: $sin(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$;

C: $sin(x) = cos(x) + \frac{\pi}{2}$; D: $sin(x) = cos(x) - \frac{\pi}{2}$;

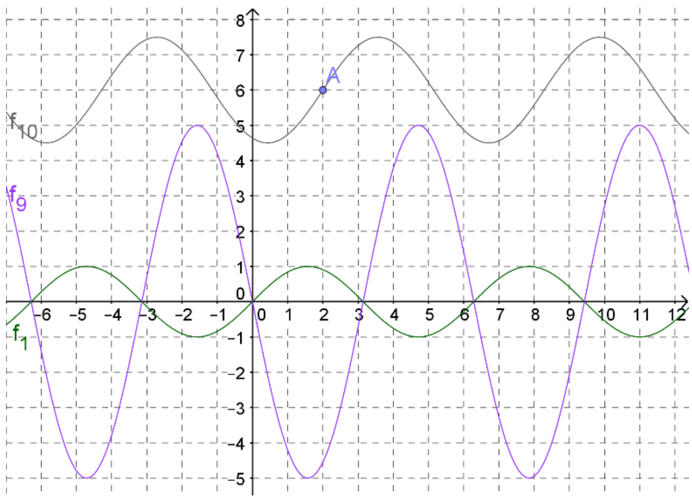
( , Kontrolle mit )

e) Ermittle die Gleichungen

$f_1(x) =$______________

$f_9(x) =$______________

$f_{10}(x) =$______________



f_9 geht aus f_1 hervor durch folgende geometrische Operationen:

f_{10} geht aus f_1 hervor durch folgende geometrische Operationen:

[1] geom. Operationen: Spiegelung an x-Achse, Streckung/Stauchung in y-Richtung um Faktor …, Verschiebung um … LA nach links/rechts/oben/unten. Bei den Operationen: Reihenfolge beachten!