LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: obere Dreiecksmatrix

Dreiecksmatrix, obere [Lineare Algebra, Matrizenrechnung]

Matrix, bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind.

Beispiel 1: $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ist *keine* obere Dreiecksmatrix, da unterhalb des Diagonalelements 2 noch eine **4** steht.

Beispiel 2 und 3: $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind dagegen eine obere Dreiecksmatrizen.

Anwendungen:

Untersuchung Linearer Gleichungssysteme auf Lösbarkeit
Gegeben ist ein LGS mit n Gleichungen und n Variablen. Nun bildet man die erweiterte Koeffizientenmatrix und formt sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens in obere Dreiecksgestalt um.
Ist danach irgendwo auf der Hauptdiagonale eine Null, so ist das LGS nicht eindeutig lösbar (sondern unlösbar oder mehrdeutig lösbar). Sind alle Elemente der Hauptdiagonale ungleich Null, ist das LGS eindeutig lösbar.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -1 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-1} & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 16 \end{array}\right)$ ist eindeutig lösbar, da keine Null auf der Hauptdiagonale vorkommt (2 ≠0, -1 ≠0 und 8 ≠0).
Der Rang (Anzahl der Nichtnullzeilen) der Koeffizientenmatrix (- die umfasst die drei Spalten links -) ist 3,
der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix (- das ist die ganze Matrix mit allen vier Spalten -) ist auch 3.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & -1 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{-1} & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 16 \end{array}\right)$ ist nicht eindeutig lösbar, da eine Null auf der Hauptdiagonale vorkommt.

Der Rang (Anzahl der Nichtnullzeilen) der Koeffizientenmatrix ist 2,
der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist aber 3.
Die untere Zeile bedeutet: $0\,x + 0\,y + 0\,z = 16$, also ist klar, dass das LGS in diesem Fall unlösbar ist.

Untersuchung, ob eine Matrix invertierbar ist.
Dazu formt man die die Matrix mit Hilfe des Gauß-Verfahrens in obere Dreiecksgestalt um.
Ist danach bei einer quadratischen Matrix irgendwo auf der Hauptdiagonale eine Null, so ist die Matrix nicht invertierbar – sonst schon.

Beispiel 2 und 3:
$M_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ ist invertierbar, da keine Null auf der Hauptdiagonale vorkommt 2 ≠0, -1 ≠0 und 8 ≠0.
Der Rang von M_2 (Anzahl der Nichtnullzeilen) ist 3.

$M_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, da eine Null auf der Hauptdiagonalen ist.
Der Rang von M_3 (Anzahl der Nichtnullzeilen) ist 3.