[Glossar](#): Fernverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Fernverhalten [Analysis]

Beim Fernverhalten einer Funktion geht es das Verhalten „weit weit draußen“, also für betraglich große x.

Das entscheidende hierbei sind die Grenzwerte
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

anschaulich:
Es geht darum, wie sich der Funktionsgraph für sehr große x (wie z.B. 10000) und für sehr kleine x (wie -10000) verhält: Wenn der Bildschirmausschnitt groß genug gewählt ist, interessiert man sich also dafür, was am rechten oder linken Rand des Diagramms beim Graph passiert.

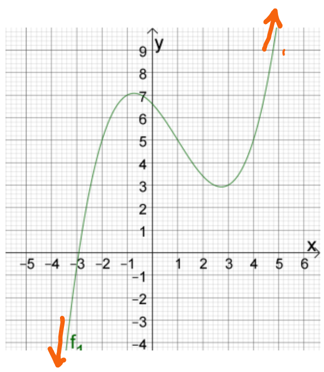
Bsp. 1
Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3:

$$f_1(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 - 1{,}2x + 6{,}6$$

Der Graph „kommt von links unten“, also gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

("$x \to -\infty$" unter dem „Limes“ weist darauf hin, dass das links passiert, " $= -\infty$" bedeutet: von unten)



Und er „geht nach rechts oben“, also gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

("$x \to \infty$" unter dem „Limes“ weist darauf hin, dass das rechts passiert, " $= \infty$" bedeutet: nach oben)

Regeln:

Meist ist $f(x)$ in der Normalform gegeben, z.B.

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 - x + 15$$

Dann entscheidet allein der Teil mit dem höchsten Exponenten über das Fernverhalten:

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 - x + 15$$

Der Leitkoeffizient -0,1 ist negativ, also geht es „am Ende nach

unten“ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$)
Der Grad (der höchste Exponent in der Normalform) ist 3, also eine ungerade Zahl.
Also „kommt f nicht aus der Richtung, in die der Graph am Ende geht, sondern aus der entgegengesetzten Richtung“
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$)

Allgmein gilt:
Bei einer ganzrationalen Funktion entscheiden Grad und Leitkoeffizient über das Fernverhalten (Grenzwert für x gegen -∞ und für x gegen ∞)

Es gilt:
Ist der Leitkoeffizient a_n von f positiv, so ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Ist der Leitkoeffizient a_n von f negativ, so ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
Ist der Grad n von f gerade, so ist sind beide Grenzwerte identisch: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$,
ansonsten haben beide das entgegengesetzte Vorzeichen:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Bsp.: Gegeben ist ein Funktion h in Normalform, die folgendermaßen beginnt: $h(x) = -0{,}02x^8 + \cdots$
Dann ist der Leitkoeffizient (das ist $a_8 = -0{,}02$) negativ, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$$

Weiterhin ist der Grad (das ist $n = 0$) gerade und daraus folgt, dass sich das Vorzeichen beim Grenzwert für x gegen $-\infty$ umkehrt, also

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$$

Mehr zum **Fernverhalten bei gebrochen-rationalen Funktionen:** hier

Mehr zum **Fernverhalten von e-Funktionen**: hier

LORE LORENTZ SCHULE

Merkhilfe:
Der Fernverhaltens-Hampelmensch …

ungerader Grad:
n=2 oder 4 oder …
Dann sind beide Grenzwerte gleich
(„von oben, nach oben"…)

gerader Grad
n=1 oder 3 oder …
Dann sind beide Grenzwerte unterschiedlich
(„von oben, nach unten"…)

∞

positiver Leitkoeffizient

$a > 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

negativer Leitkoeffizient

$a < 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$-\infty$

$-\infty$