Glossar: Flächeninhalt

Flächeninhalt (einer krummlinig berandeten Fläche) [Analysis, Integralrechnung]

Der Ausdruck ist ziemlich sperrig: „krummlinig berandet“. Andererseits: alles, was nur (gerade) Strecken als Seiten hat, wir ein Viereck, ein 17-Eck oder die Fläche unterhalb eines Polygons, kann man in Dreiecke zerlegen. Die Bestimmung des entsprechenden Flächeninhalts reduziert sich damit auf die Berechnung der Hälfte des Produkts von Grundseite und Höhe.

Schon bei einer quadratischen Parabel (und allen anderen nichtlinearen Funktionen) reicht das nicht mehr und man benötigt die Integralrechnung (von Sonderfällen wie einem Kreisbogen vielleicht einmal abgesehen).

Im Unterschied zum orientierten Flächeninhalt kann der Flächeninhalt nicht negativ sein.

Wir gehen nun von einer stetigen Funktion f aus (das kann man im Rahmen der Schulmathematik ruhig voraussetzen).

Um einen Flächeninhalt zu berechnen, den der Graph der Funktion f über dem Intervall [a ; b] mit der x-Achse einschließt, überprüft man zunächst, ob f in diesem Intervall Nullstellen hat.

Man zerlegt dann das Intervall in Teilintervalle und berechnet die dazu gehörenden bestimmten Integrale: Also zuerst von a bis zur ersten Nullstelle, dann von der ersten bis zur zweiten Nullstelle und so weiter.

Damit hat man die einzelnen orientierten Flächeninhalte, die allerdings negativ sind, wenn der Graph im entsprechenden Intervall unterhalb der x-Achse verläuft. Da es streng genommen keine negative Flächeninhalte gibt, nimmt man die Beträge dieser einzelnen Integrale – die sind schließlich alle positiv – und addiert sie.

Bsp.: $f(x) = -x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

Gesucht ist aus irgend einem Grund der Inhalt der Fläche, den der Graph von f über dem Intervall [1 ; 4] mit der x-Achse einschließt.

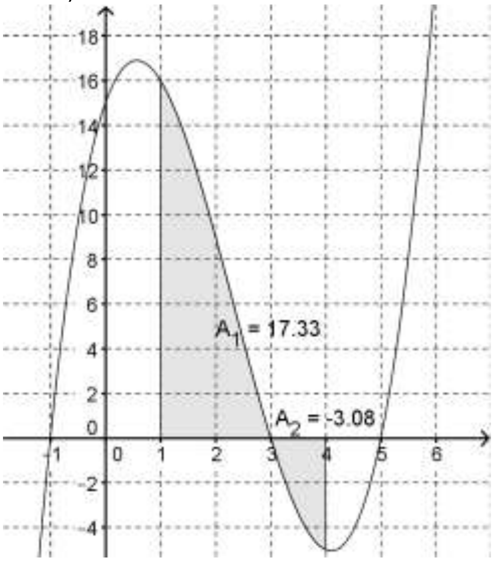
Eine Funktionsuntersuchung (hier würde einer Wertetabelle reichen) zeigt:
f hat Nullstellen bei x = -1, x = 3 und x = 5, also im Intervall [1 ; 4] nur die Nullstelle x = 3.
Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$A=\left|\int_1^3 f(x)dx\right|+\left|\int_3^4 f(x)dx\right|$$

Mit Hilfe einer Stammfunktion F mit

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 15x$$

erhält man: A = | F (3) – F (1) | + | F (4) – F (3) | ≈ 17,33



Bem.: Durch ein CAS ändert sich so einiges:
Damit braucht man keine Gedanken um irgendwelche Nullstellen zu machen:
Die Funktion „Absolutbetrag" klappt einfach alle unterhalb der x-Achse verlaufenden Teile des Funktionsgraphen nach oben:
$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Links:
http://www.mathematik.de/mde/fragenantworten/erstehilfe/integration/flaechen/flaechenberechnung.html,
Übungsaufgaben:
http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/inhint.htm

Lore Lorentz
LORE LORENTZ SCHULE