Glossar: h-Methode

h-Methode zur Berechnung der Ableitung von f an der Stelle x_0 [Analysis, Differentialrechnung]

Die Steigung f zwischen zwei Punkten auf dem Funktionsgraph kann man mit Hilfe der Formel

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

berechnen – es ist ein Differenzenquotient.

Die Frage nach der exakten Steigung von f an der Stelle x_0 kann man aber auf diesem Weg nicht direkt beantworten.

Näherungsweise kann man eine Hilfsstelle x nahe bei x_0 wählen (und danach vielleicht immer noch näher bei x_0), aber auf diesem Weg bleibt es bei einer Näherungslösung.

Daher betrachtet man nun *alle möglichen* Hilfsstellen x gleichzeitig:

Bei der h-Methode setzt man $x = x_0 + h$ mit $h \neq 0$. Dabei kann man sich unter h eine betraglich kleine Zahl vorstellen – also so etwas wie h =0,001 oder h=-0,0001. Aber da man sich bei h nicht auf eine bestimmte Zahl festlegt, geht es immer noch kleiner.

Für den nächsten Teil brauchen wir ein Grundverständnis für den Grenzwert – also: was passert, wenn h „gegen Null geht“ ,,,

Wir führen die h-Methode hier zunächst für eine bestimmte Funktion f und an einer bestimmten Stelle x_0 durch:

Bsp.: $f(x) = 4x^2 + 2x$.
Gesucht ist die Steigung von f an der Stelle $x_0 = 3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)^2+2(3+h)-(4\cdot 3^2+2\cdot 3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(3^2+2\cdot 3h+h^2)+2\cdot 3+2h-4\cdot 3^2-2\cdot 3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(9+6h+h^2)+6+2h-36-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{36}+24h+4h^2+\boxed{6}+2h\boxed{-36-6}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{24h+4h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h^2+26h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}4h+26 = \underline{\underline{26}}$$

Damit ist die gesuchte Steigung berechnet:
$f'(3) = 26.$

Anleitung: Man setzt also immer konsequent in den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ein:
Zuerst ersetzt man darin x_0 durch die entsprechende Stelle (im Beispiel oben: $x_0 = 3$),
dann ersetzt man jedes $f(\ldots)$ durch die konkrete Funktionsvorschrift, also oben: $4\cdot(\ldots)^2 + 2\cdot(\ldots)$.
Das vereinfacht man weiter (bei quadratischen Funktionen durch Verwendung der Binomischen Formeln, Auflösen der Klammern, Zusammenfassen (jeweils aller Terme mit h^2 und der mit h, und der ohne h). Am Ende kürzt man.

Erläuterungen unter mathebibel
Streng mathematisch gesehen ist hierfür der Begriff des Grenzwerts einer Folge grundlegend.

Auf ihm baut der Begriff des Grenzwerts einer Funktion für x gegen ∞ wie auch für x gegen eine bestimmte Stelle x_0 auf.