Glossar: Horner-Schema

Horner-Schema [Analysis]

Schema, mit dem man auf einfache Weise Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion berechnen kann.

Bsp.: $f(x) = -2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 10$. Gesucht: $f(3)$

	-2	5	6	-10
	↓	·3 ↗ =-6 ↓+5	·3 ↗ =-3 ↓+6	·3 ↗=9 ↓-10
x=3	-2	-1	3	$-1\ = f(3)$

Bem.: Die grau eingefärbte Zeile dient nur der Erläuterung der Nebenrechnungen. Normalerweise wird sie nicht mit aufgeschrieben.

Anwendung: Hauptsächlich wird das Horner-Schema verwendet, um ganzrationale Gleichungen zu lösen – also Nullstellen einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen.

Mit dem Einsetzen einer Zahl a ins Horner-Schema kann man ein Polynom durch den linearen Term $(x - a)$ teilen – also wie bei der Polynomdivision eine Zerlegung in (Linear-)Faktoren zu bewerkstelligen. Die Zwischenergebnisse des Horner-Schemas entsprechen dabei den Koeffizienten der Lösung.
Das Endergebnis – also $f(a)$ – ist der Rest.
Wenn also beim Horner-Schema Null herauskommt, gibt es keinen Rest: Man hat eine Möglichkeit gefunden, den linearen Term $(x - a)$ abzuspalten:

Bsp.: $f(x) = -2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 9$.
Bekannt: Eine Nullstelle liegt bei $x\ =\ 3$.
Gesucht: Faktorisierung / weitere Nullstellen.

	-2	5	6	-9
	↓	·3 ↗ =-6 ↓+5	·3 ↗ =-3 ↓+6	·3 ↗=9 ↓-12
x=3	-2	-1	3	$\underline{\underline{0}}$ =f(3)

Ergebnis: $f(x)\ =\ (x - 3)\ (\,-2x^2 - \,x\ +\ 3\,)$
Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ x – 3 = 0 $\vee$ $-2x^2 - x + 3 = 0$ (nun lösbar mit quadratischer Ergänzung)
x = 3 $\vee$ $-2x^2 - x + 3 = 0$ | :(-2)
$\Leftrightarrow$ x = 3 $\vee$ $x^2 + \frac{1}{2}x - 1{,}5 = 0$ | $+ 1{,}5 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$
$\Leftrightarrow$ x = 3 $\vee$ $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$
$\Leftrightarrow$ x = 3 $\vee$ $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$
$\Leftrightarrow$ x = 3 $\vee$ $x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \vee x + \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$
$\Leftrightarrow$ x = 3 $\vee$ $x = 1 \vee$ x=-1,5
Damit sind alle drei Nullstellen berechnet.

Geschichte: Das Horner-Schema stammt aus der Zeit vor Erfindung des Taschenrechners - die Suche nach Rechenvereinfachungen hatte also eine eminent praktische Bedeutung. Der englische Mathematiker Sir William George Horner (1786 – 1837) hat dieses Verfahren entwickelt und publiziert – er hat es allerdings nicht als erster entdeckt.

Links: mehr zum Lösen ganzrationaler Gleichungen: Links ganzationale Gleichungen

basistext_gleichungen