Glossar: Satz vom Nullprodukt

Satz vom Nullprodukt [Grundlagen]

Ein sehr nützlicher Satz zum Lösen bestimmter Gleichungen:

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Das ist leicht einzusehen:
Die Faktoren a bzw. b können entweder positiv, negativ oder gleich Null sein.
Wenn Sie beide positiv sind, ist auch a·b positiv (also nicht Null)
Wenn Sie beide negativ sind, ist a·b ebenfalls positiv (also nicht Null)
Wenn ein Faktor positiv und der andere negativ ist, so ist a·b negativ (also wieder nicht Null)
Also muss im Fall, dass a · b = 0 ist, a Null sein oder b Null sein (oder beides).

Beispiel 1: Lösen Sie die Gleichung: (x + 3) · (2 x – 5) = 0
Lösung: (x + 3)·(2 x – 5) = 0
⇔ x + 3 = 0 ∨ 2 x – 5 = 0
⇔ x = -3 ∨ 2 x = 5
⇔ x = <u>-3</u> ∨ x = <u>2,5</u>

Häufigste Anwendung: Nullstellenbestimmung

Ansatz zur Berechnung: $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Beispiel 2: Berechnung der Nullstellen von f mit
f(x) = (0,1 x - 8) · (5 x + 15) = 0
Lösung: (0,1 x - 8) · (5 x + 15) = 0
⇔ 0,1 x - 8 = 0 ∨ 5 x + 15 = 0
⇔ 0,1 x = 8 ∨ 5 x = -15
⇔ x = <u>80</u> ∨ x = <u>-3</u>

kannst du´s? **Check**

Beispiel 3: Berechnung der Nullstellen von f mit
$f(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0$
Lösung: $x \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 4x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$ | quadr. Erg.
$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x + 2)^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 2 = 1 \vee x + 2 = -1$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = -3$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \vee x = \underline{\underline{-1}} \vee x = \underline{\underline{-3}}$

Beispiel 4: Oft hilft Ausklammern:
$f(x) = (x^2 + 4x) = 0$
Lösung: $x \cdot (x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \vee x = \underline{\underline{-4}}$

Check, ob du quadratische Gleichungen durch Ausklammern lösen kannst: hier

Beispiel 5: Berechnung der Nullstellen von f mit
$f(x) = (06\,x - 1{,}2) \cdot e^{-0{,}6x+1{,}8} = 0$
Lösung: $(06\,x - 1{,}2) \cdot e^{-0{,}6x+1{,}8} = 0$
$\Leftrightarrow 06\,x - 1{,}2 = 0 \vee e^{-06x+1{,}8} = 0$ (Die e-Funktion nimmt aber nirgends den Wert Null an.)
$\Leftrightarrow 06\,x = 1{,}2$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{2}}$.

Beliebte Fehler:

Beliebt wie immer der Vorzeichenfehler:
z.B. bei $(x + 2)(x - 4) = 0$
„$\Leftrightarrow$“ $x = 2 \vee x = -4$, statt $x = -2 \vee x = 4$.

Manchen wächst der Satz von Nullprodukt so ans Herz, dass sie auch nicht auf ihn verzichten möchten, wenn das Produkt gar nicht Null ist.
z.B. bei $(x + 2)(x + 4) = 48$
Mache meinen nun, die 48 sei eigentliche überflüssig und geben $x = -2$ und $x = -4$ als Lösung an.
Andere nehmen den „Satz von Achtundvierzigprodukt“ zu Hilfe und rechnen $x + 2 = 48 \vee x + 4 = 48$.
Leider gibt es keinen „Satz von Achtundvierzigprodukt“. Man muss die Klammern auflösen und dann die quadratische

	Gleichung in den Griff kriegen (z.B. mit quadratischer Ergänzung). **Training:** Check: hier und hier LearningApps 1