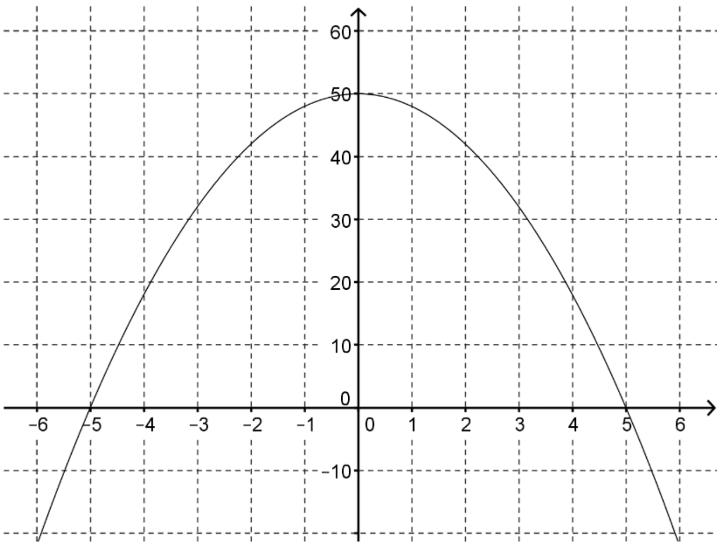
LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Nullstelle

Nullstelle einer Funktion f [Analysis]

Stelle, an der f den Funktionswert Null annimmt, d.h. der x-Wert, bei dem 0 herauskommt, wenn man ihn in f einsetzt.

Beispiel: 5 ist eine Nullstelle von f mit $f(x) = -2x^2 + 50$, denn $f(5) = -2 \cdot 5^2 + 50 = 0$.
Das heißt nun noch nicht, dass 5 die *einzige* Nullstelle von f ist. (Das ist es übrigens in diesem Fall auch nicht: Siehe Abbildung.)



Graphisch: x-Koordinate des Schnittpunktes von Graph und x-Achse.
z.B. erkennen wir am Graph die Nullstelle $x = 5$, die wir oben nachgerechnet haben, und außerdem noch die weitere Nullstelle $x = -5$ (, die von manchen bei der Berechnung gern vergessen wird).

Ansatz zur Berechnung: $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Bem.: Eine ganzrationale Funktion kann höchstens so viele Nullstellen haben, wie ihr Grad angibt.
(Eine seltsame Ausnahme ist hier die Nullfunktion – aber das ist nicht wirklich wichtig.)

Verfahren zur Nullstellenbestimmung:
Welches Verfahren sinnvoll ist, hängt von der Art der Funktion ab – und natürlich vom Werkzeug:
Hat man ein CAS, kann man fast jede Gleichung knacken (lassen).
Genaueres dazu hier.

Mit einem Taschenrechner wie dem TI30XPro oder einem entsprechenden Casio-Modell kann man quadratische und kubische Gleichungen direkt und vollständig lösen lassen und so gut wie jede Gleichung numerisch lösen.
Genaueres dazu hier.

Bei linearen Funktionen reicht die Verwendung der Gegenoperatoren – einfacher gesagt, man zieht den y-Achsenabschnitt auf beiden Seiten der Gleichung ab und teilt dann durch die Steigung.

Beispiel für Nullstellenberechnung:
Lineare Funktion: $f(x) = 3x + 18$
Nullstelle: $3x + 18 = 0 \mid -18$
$\Leftrightarrow 3x = -18 \mid :3$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-6}}$.

etwas ausführlicher: hier
mehr zum Lösen linearer Gleichungen: hier

Bei **quadratischen Funktionen** verwendet man in der Regel die quadratische Ergänzung oder die p-q-Formel.

Beispiel für Nullstellenberechnung:
Quadratische Funktion: $f(x) = 3x^2 + 24x - 45$
$3x^2 + 24x + 21 = 0 \mid :3$
$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \mid -7$ und $+ (8/2)^2$ quadratische Ergänzung
$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = -7 + 16 \mid$
$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 9 \quad \mid \pm\sqrt{}$
$\Leftrightarrow x + 4 = 3 \vee x + 4 = -3 \quad \mid -4$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-1}} \vee x = \underline{\underline{-7}}$

Check: Kannst du die quadratische Ergänzung? hier
Trainieren? Hier

Bei **kubischen Funktionen** oder **ganzrationalen Funktionen** höheren Grades wird man in der Regel Polynomdivision oder das Horner-Schema einsetzen

mehr zum Lösen kubischer Gleichungen: hier
Ausführlich zur Vorgehensweise: Basistext Gleichungen lösen

Bem. Bei ganzrationalen Funktionen kommen auch sogenannte doppelte bzw. mehrfache Nullstellen vor. Diese haben besondere Eigenschaften bzgl. Vorzeichenwechsel und lokalem Näherungsverhalten.

Anwendungen:
Schnittpunkte mit der x-Achse;
technische / innermathematische Anwendungen:
Um Nullstellen aller möglicher Funktionen zu berechnen verwendet man häufig das Newton-Verfahren. Dabei werden nach und nach immer wieder Tangentengleichungen aufgestellt und dann deren Nullstellen berechnet (also die Nullstellen linearer Funktionen bestimmt). Link: serlo

ökonomische Anwendungen:
Nullstellen einer Gewinnfunktion: Gewinnschwelle bzw. Gewinngrenze (Siehe: Gewinnzone).
Beispiel zur Berechnung der Gewinnzone einer linearen Gewinnfunktion (lineare Kostenfunktion (Polypol): hier
Beispiel zur Berechnung der Gewinnzone einer quadratischen Gewinnfunktion (Monopol): hier
Beispiel zur Berechnung der Gewinnzone einer kubischen Gewinnfunktion (kubische Kostenfunktion (Polypol): hier
Nullstelle einer Preisabsatzfunktion: Sättigungsmenge.
Beispiel zur Berechnung der Sättigungsmenge: hier