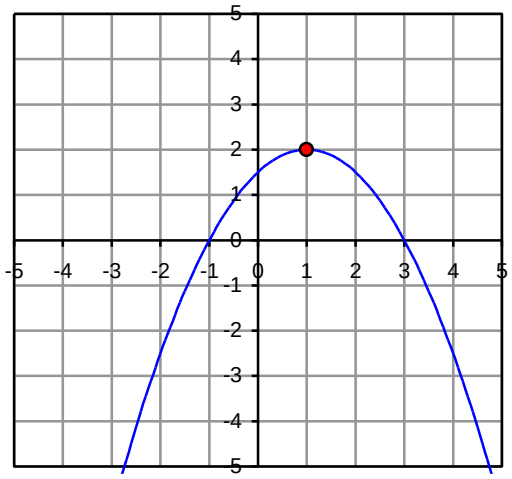
Glossar: Scheitelpunkt

Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion f [Analysis]

Jede quadratische Funktion hat genau einen **Extrempunkt** – das kann ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt sein. Dieser Punkt heißt Scheitelpunkt.



Bsp.: Abgebildet ist die Parabel zur Funktion f mit $f(x) = -0{,}5\,x^2 + x + 1{,}5$ (Normalform) $= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ (Scheitelpunktform).

Der Scheitelpunkt der abgebildeten Parabel ist $(\,1 \mid 2\,)$. Das sieht man an der Parabel (roter Punkt), man kann es aber auch an der Scheitelpunktform direkt ablesen:

$$-\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$$

Vorzeichen rumdrehen so lassen

$$(\,1 \mid 2\,)$$

Also:
Man ignoriert den Faktor vor der Klammer (den Leitkoeffizienten) $-\frac{1}{2}$,
ändert das Vorzeichen der -1 und hat damit die x-Koordinate $x = 1$ und nimmt die $y = 1$ als y-Koordinate.

Bem. 1: Von einem Scheitelpunkt spricht man nur bei quadratischen Funktionen (ansonsten spricht man von einem lokalen Hoch- oder Tiefpunkt).

Bem. 2: Die senkrechte Gerade, die durch den Scheitelpunkt geht, ist zugleich die Symmetrieachse des Funktionsgraphen, d.h. der Graph ist achsensymmetrisch zu ihr.

Berechnung der Koordinaten des Scheitelpunkts aus der Normalform:

1. Möglichkeit: auf Scheitelpunktform bringen,

2. Möglichkeit: Berechnung des Extrempunkts mit Differentialrechnung: Dazu reicht die notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x) = 0$
Bsp.: $f(x) =$ -0,5 x^2 + x + 1,5 (wie oben)
f´(x) -x + 1
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
-x + 1 = 0
$\Leftrightarrow x = 1$, also ist das die x-Koordinate des Scheitelpunkts.
Um sicher zu gehen, dass niemand mäkelt, man habe die hinreichende Bedingung nicht überprüft, betont man, dass ausnahmslos jede Parabel bekanntlich einen Scheitelpunkt hat.
$f(1) = 2$ liefert die y-Koordinate des Scheitelpunkts.

3. Möglichkeit: Man benutzt die oben genannte Symmetrieeigenschaft: Kennt z.B. die Nullstellen einer quadratischen Funktion, dann ist genau in deren Mitte die x-Koordinate des Scheitelpunkts (Wenn also x_1 und x_2 die Nullstellen sind, berechnet man deren arithmetisches Mittel $\frac{x_1 + x_2}{2}$).
Nun haben allerdings manche quadratische Funktionen gar keine Nullstellen. In dem Fall reicht es irgendwelche Punkte auf dem Graph zu finden, die die gleiche Höhe haben (also dieselbe y-Koordinate). Auch deren arithmetisches Mittel ergibt dann die x-Koordinate des Scheitelpunkts.

Check, ob du dich mit der Scheitelpunktform auskennst: hier

Links: ausführliche Anleitung zur Scheitelpunktbestimmung: auch bei matroid.