Lerngerüst Lineare Algebra

Thema	Bemerkungen und Erläuterungen
Grundlagen: Lineare Gleichungs-systeme (LGS)	Ein Lineares Gleichungssystem ist sozusagen ein „Paket“ von linearen Gleichungen: Zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen eignen sich mehrere Verfahren - insbesondere Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren und Additionsverfahren. Wenn es sich um größere LGS handelt oder man einen programmierte Lösung anstrebt, bietet das Additionsverfahren entscheidende Vorteile. Um Schreibarbeit zu sparen, wird es oft in Matrizenschreibweise durchgeführt (zu Matrizen siehe unten). Man nennt es dann Gauß-Verfahren. Anwendungen: Berechnung der Inversen In der Analysis: Steckbriefaufgaben. In der Analytischen Geometrie: Lage- und Schnittmengenprobleme zwischen Geraden oder Ebenen in Parameterform Bei mehrstufigen Produktionsprozessen Fragen der Art „wie viel kann man produzieren, wenn alles verbraucht werden soll“. Im Leontiev-Modell u.a. die Frage, ob das System prinzipiell jeden Konsum ermöglicht Bei Übergangsmatrizen die Rekonstruktion vorangegangener Zustände Links: gauss_anwendungen Checklist mit Material- und Übungslinks ohne Gauß-Verfahren: http://www.mcg-boenen.schulnetz.hamm.de/mathematik/lgs.pdf Erläuterungen anhand vorgerechneter Beispiele: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/9/lgsbsp2.htm Sehr ausführliches Leitprogramm (98 Seiten pdf): lin_gleich Übungsaufgaben (umfangreich): mathods.com Allgemeines LGS, mathods.com Gaußverfahren Selbstlernmaterialien: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/la/lgs/lgsindex.html Interaktive Einführung am Beispiel Computertomographie: http://www.matheprisma.de/Module/CT/index.htm

Vektorrechnung / Analytische Geometrie	Gute Einführung in die Grundbegriffe: http://www.geogebra.org/de/examples/vektor_einfuehrung/ Lernpfad Vektoren 1: Vektorrechnung in der Ebene (Austromath) Lernspirale Vektoren 1: Vektorrechnung in der Ebene (Austromath) Lernpfad Vektoren 2: Vektorrechnung in der Ebene (Austromath) Arbeitsplan Vektoren 2: Vektorrechnung in der Ebene (Austromath) Ausführlich und verständlich: http://henked.de/begriffe/vektor.htm
Grundlagen	**Definitionen**, Ein **Vektor** ist ein Zahlentupel (also Zahlen sozusagen im Paket.) In der anschaulich vorstellbaren Analytischen Geometrie geht es dabei um zweidimensionale Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (in der Ebene $\mathbb{R}^2$) oder um dreidimensionale Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (im Raum $\mathbb{R}^3$). In anderen Zusammenhängen (z.B. bei ökonomischen Anwendungen) ist die Anzahl der Koordinaten (die sogenannte **Dimension** des Vektors) praktisch nicht begrenzt. Um sie deutlich von den Vektoren abzugrenzen, erhalten Zahlen in diesem Zusammenhang einen besonderen Namen: Sie werden als **Skalare** bezeichnet.
Operationen	**Vektoraddition** und –**subtraktion** ebenso wie die **Multiplikation mit einem Skalar** erfolgen komponentenweise – also so, wie man es intuitiv sowieso machen würde. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

	$k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$
Linearkombination	Jeder Vektor, der sich durch skalare Multiplikation und Addition aus anderen Vektoren bilden lässt, heißt Linearkombination dieser Vektoren. Zwei Vektoren, bei denen der eine Linearkombination des anderen ist (also ein Vielfaches), heißen linear abhängig. Man nennt sie auch kollinear. Drei Vektoren, bei denen der eine Linearkombination der beiden anderen ist (also eine Summe der Vielfachen), heißen linear abhängig. Man nennt sie auch komplanar. Übungen: mathods
Norm, Betrag oder Länge eines Vektors	$\lvert\vec{x}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Das ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras.) $\lvert\vec{x}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (Das ergibt sich aus der zweimaligen Anwendung des Satzes des Pythagoras.) Selbsteinschätzungsbogen
Gegenvektor	Zum Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ der Gegenvektor. Er hat dieselbe Länge und Richtung, aber die andere Orientierung.
Ortsvektor	Gegeben ist der Punkt A (a_1 ; a_2; a_3). Der Pfeil, der vom Ursprung zu A geht, gehört zum Vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Man nennt ihn den Ortsvektor von A.
Verbindungsvektor **Verschiebungsvektor**	Gegeben sind zwei Punkte A (a_1 ; a_2 ; a_3) und B (b_1 ; b_2 ; b_3). Dann gehört der Pfeil von A nach B zum Vektor

	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.
Skalarprodukt	Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ist $\vec{u} * \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ $= \cos(\alpha) \cdot \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert$ Eigenschaften: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Anwendungen: **Winkelberechnung**, **Abstandsprobleme** Links: Selbstdiagnose Skalarprodukt (Überblick über viele Übungsmöglichkeiten): http://www.ghg-alsdorf.de/fachkonferenz/mathe/selbstdiagnose/skalarprodukt/selbstdiagnose_skalarprodukt.pdf Skalarprodukt berechnen: Selbsteinschätzungsbogen Überprüfung auf Orthogonalität: Selbsteinschätzungsbogen Bestimmung orthogonaler Vektoren: Selbsteinschätzungsbogen Anwendungen: Selbsteinschätzungsbogen Weitere Informationen und Material: Bildungsserver Baden-Württemberg Sehr ausführlicher Artikel für Menschen mit langem Atem: matheplanet
Winkel	Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Auf dieser Basis kann man auch die Winkel zwischen Geraden bzw. Ebenen berechnen. Erläuterungen und Beispiele: Winkel Selbsteinschätzungsbogen
Geraden -	Übungen: mathods

Parameterdarstellung	
Ebenen – Parameterdarstellung	
Schnittprobleme	**Aufgaben** mit Lösungen: Schnitte von Geraden, Schnitte von Ebenen,
Normalenvektoren	Bestimmung orthogonaler Vektoren: Selbsteinschätzungsbogen
Geraden - Normalendarstellung	
Ebenen - Normalendarstellung	
alltogether now (Übungen querdurch)	Skript mit vielen Aufgaben: http://www.mathe-physik-aufgaben.de/mathe_uebungen_raumgeometrie1/Aufgaben-M-Raumgeometrie-1.pdf Abituraufgaben Hamburg 2008 LA: http://www.mint-hamburg.de/abitur/LA.pdf
Matrizenrechnung	knappe Übersicht: mathe-in-smarties Material auf dem Bildungsserver Baden-Württemberg,
Grundlagen	Definitionen, **Matrizenaddition**, **Multiplikation mit einem Skalar** (also einer Zahl) Bei der Matrizenaddition und der Multiplikation mit einem Skalar ist alles wie erwartet: Es gelten Kommutativgesetz und Assoziativgesetz. Links: Aufgaben Addition: mathe-in-smarties – Lösungen: mathe-in-smarties **Matrizenmultiplikation** (Falk´sches Schema) Bei der Matrizenmultiplikation ist *nicht* alles wie gewohnt: Es gibt **Nullteiler**, also Matrizen A und B, die nicht Nullmatrix sind und dennoch ist das Produkt AB die Nullmatrix. Das bedeutet, der Satz vom Nullprodukt gilt für Matrizen nicht. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, es gilt im Allgemeinen $A B \neq B A$. Man muss also darauf achten, von welcher Seite man eine Matrix mit einer anderen multipliziert.

	Links: Aufgaben Multiplikation: mathe-in-smarties – Lösungen: mathe-in-smarties Selbsteinschätzungsbogen Links: zu Grundlagen: sehr ausführlich: http://www.mint-hamburg.de/Handreichungen/Ma-gyO/ → Grundkurs G2 (Matrizen und Vektoren als Datenspeicher: Lehrerheft, Lernheft und Aufgaben)
Lineare Gleichungssysteme (=LGS) (Gauß-Algorithmus, Lösungskriterien)	Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform (das entspricht im Regelfall der oberen Dreiecksform / Zeilenstufenform) **homogenes LGS**: $A \cdot \underline{\vec{x}} = \underline{\vec{o}}$ ist immer lösbar (denn die triviale Lösung $\underline{\vec{x}} = \underline{\vec{o}}$ geht immer). **Rang**: Anzahl der Nichtnullzeilen in der Matrix **Rangkriterium** für die **Lösbarkeit** eines LGS: Rang(A) = Spaltenanzahl(A) ⇔ eindeutig lösbar, sonst mehrdeutig lösbar. inhomogenes LGS: $A \cdot \underline{\vec{x}} = \underline{\vec{b}} \neq \underline{\vec{o}}$ Rang(A) = Spaltenanzahl(A) ⇔ eindeutig lösbar, Rang(A) < Rang(A | $\underline{\vec{b}}$) ⇔ unlösbar, sonst mehrdeutig lösbar. Anwendungen: Bei mehrstufigen Produktionsprozessen Fragen der Art „wie viel kann man produzieren, wenn alles verbraucht werden soll“. Im Leontiev-Modell u.a. die Frage, ob das System prinzipiell jeden Konsum ermöglicht Bei Übergangsmatrizen die Rekonstruktion vorangegangener Zustände Links: gauss_anwendungen Checklist mit Material- und Übungslinks ohne Gauß-Verfahren: http://www.mcg-boenen.schulnetz.hamm.de/mathematik/lgs.pdf Erläuterungen anhand vorgerechneter Beispiele: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/9/lgsbsp2.htm und auf dem Bildungsserver Baden-Württemberg Sehr ausführliches Leitprogramm (98 Seiten pdf): lin_gleich Selbsteinschätzungsbogen (Aufgabe mit Paramter) Rangbegriff mit Aufgaben: mathods. Selbstlernmaterialien: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/la/lgs/lgsindex.html

	Interaktive Einführung am Beispiel Computertomographie: http://www.matheprisma.de/Module/CT/index.htm
Matrizenoperationen mit Hilfe der **Inversen**	Definition Inverse: Gegeben ist eine quadratische Matrix A (Zeilenanzahl = Spaltenanzahl) $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$ Achtung: Nicht jede Matrix ist invertierbar (nur bei maximalem Rang, also Rang = Zeilen- bzw. Spaltenanzahl). Invertierbare Matrizen heißen auch regulär. Berechnung der Inversen mit dem Gaußverfahren Ansatz: Man schreibt die Matrix A auf und schreibt daneben die Einheitsmatrix E. Dann führt man das Gauß-Verfahren durch, um A in E umzuformen. Am Ende steht – wenn A invertierbar ist - auf der rechtne Seite A^{-1}. $(A \mid E)$, Umformung zu $(E \mid A^{-1})$ Links: vorgerechnetes Beispiel auf dem Bildungsserver Baden-Württemberg. Aufgaben Inverse: mathe-in-smarties – Lösungen: mathe-in-smarties Die Lösung eines Lineares Gleichungssystems geht dann wesentlich leichter als mit Gauss: $A \cdot \underline{\vec{x}} = \underline{\vec{y}}$ $\Leftrightarrow \underline{\vec{x}} = A^{-1} \cdot \underline{\vec{y}}$ Achtung bei der Beschriftung: Bei A^{-1} sind Zeilen- und Spaltenbeschriftungen vertauscht. Regeln: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Matrizengleichungen	Links: Übungsaufgaben zu Matrizengleichungen und Inversen: Mathods.com
Anwendungen	
Innerbetriebliche Verflechtungen (**zweistufige Produktionsprozesse**)	Dieses Themenfeld ist eine Anwendung vor allem der Matrizenmultiplikation, eignet sich auch als Beispiel, anhand dessen man die Matrizenmultiplikation einführen oder nachvollziehen kann (Einführungsbeispiel). Übersicht mit Erläuterungen Gozintographen

	Matrizen Errechnung des Bedarfs: Matrizenmultiplikation Berechnung, wie viel produziert werden kann (bei vollständigem Verbrauch): Lösung eines LGS / Gauss Links: Einführungsbeispiel Übersicht Selbstlernmaterialien: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/la/bm/bmindex.html komplexe Aufgabe mit Parametern (BK Düren anspruchsvolle HöHA Aufgabe) Uni München Aufgabe mit Erläuterungen (zu zweistufigen Produktionsprozessen und Linearer Optimierung) Selbsteinschätzungsbogen
Volks- und betriebswirtschaftliche Verflechtungen zwischen Sektoren bzw. Betriebsteilen (**Leontief-Modell**)	Ein Modell zur Analyse wirtschaftlicher Verflechtungen Links: kurze Übersicht: Poenitz Ein vorgerechnetes Beispiel (auch als pdf) und zwei Powerpoint-Dateien auf dem Bildungsserver Baden-Württemberg,
Lineare Optimierung	Verfahren zur Optimierung bei linearen Problemen. Ausgehend von einem System linearer Ungleichungen, die erfüllt sein müssen, wird eine optimale Lösung gesucht durch graphische Verfahren, durch Berechnung der Schnittpunkte der entsprechenden Geraden bzw. Ebenen oder durch das Simplex-Verfahren Links: Übungen: mathods Allgemeines, mathods Basislösungen, mathods grafische Lösung, mathods Simplex, Uni München Aufgabe mit Erläuterungen (zu zweistufigen Produktionsprozessen und Linearer Optimierung)
Abbildungsgeometrie	Anwendungsfeld: Computergrafik
Übergangsmatrizen	Ein Modell, das verschiedene Zustände erfasst, zwischen denen Übergänge stattfinden. Jeder dieser Übergänge ist proportional zum entsprechenden Ausgangszustand.

	Links: Gozintographen: Selbsteinschätzungabogen, Übergangmatrizen: Selbsteinschätzungabogen, Fixvektor: Selbsteinschätzungabogen
Stochastische Prozesse und Markov-Prozesse	Ein Sonderfall der Übergangsmatrizen. Man kann also auch Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hilfe von Matrizen betreiben. Links: Erläuterungen und Aufgaben von Roolfs: nibis. Beinke: Abituraufgaben aus dem Bereich stochastische Prozesse (Artikel aus Stochastik in der Schule)
alltogether now (Übungen querdurch)	Abituraufgaben Hamburg 2008 LA: http://www.mint-hamburg.de/abitur/LA.pdf