Fit in Linearen Gleichungssystemen

(1.1) $(A_t \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 6 & 9 & 105 \\ 0 & 4 & t & 90 \end{array}\right)$

Nenne den Rang der Koeffizientenmatrix A_{10} und der erweiterten Koeffizientenmatrix (A_{10} | $\vec{b}$).

Folgere daraus begründet, ob A_{10} invertierbar ist und ob das zugehörige Lineare Gleichungssystem unlösbar, eindeutig lösbar oder mehrdeutig lösbar ist.

Überprüfe, ob $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.

Gib einen Wert für t an, so dass sich die Lösbarkeit des Linearen Gleichungssystems ändert. Lösung

(1.2) Nenne eine oder mehrere typische ökonomische Anwendung (mindestens eine aus Linearer Algebra (Matrizenrechnung)) und aus der Analysis (Funktionen) für das Gauss-Verfahren. Lösung

Lösungen

(1.1) *Lösung:* Den Rang untersucht man durch Umformung in die Form einer oberen Dreiecksmatrix: z.B.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 6 & 9 & 105 \\ 0 & 4 & 10 & 90 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II/3: \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 2 & 3 & 35 \\ 0 & 4 & 10 & 90 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2 \cdot II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 2 & 3 & 35 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2 \cdot II \end{array}$$

Rang(A_{10}) = 3; Rang(A_{10} | $\vec{b}$) = 3; (Rang: minimale Anzahl an Nichtnullzeilen – also Anzahl der Nichtnullzeilen nach der Umformung)

Da beide übereinstimmen, liegt eindeutige Lösbarkeit vor.

Da Rang(A_{10}) gleich der Spaltenanzahl von A_{10}, ist A_{10} invertierbar.

Die Lösbarkeit ändert sich, wenn sich der Rang von A_t ändert. Dazu muss $t = 6$ sein:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 6 & 9 & 105 \\ 0 & 4 & t & 90 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 2 & 3 & 35 \\ 0 & 4 & t & 90 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2 \cdot II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 88 \\ 0 & 2 & 3 & 35 \\ 0 & 0 & t-6 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2 \cdot II \end{array}$$

Für t = 6 ergibt sich eine Nullzeile von A_6. Dazu gehört die Gleichung $0 \cdot x_3 = 20$, die unlösbar ist. Somit ist das gesamte Lineare Gleichungssystem unlösbar.

(1.2) *Lösung*: Mittels des Gauss-Verfahrens löst man Lineare Gleichungssysteme.

Analysis: Man muss Lineare Gleichungssystem lösen, um Steckbriefaufgaben zu bearbeiten, also die Gleichungen ganzrationaler Funktionen zu bestimmen, deren Graph z.B. durch vorgegebene Punkte geht.

Bei mehrstufigen Produktionsprozessen ist das Gauss-Verfahren nützlich zur Berechnung der Inverse (als „Universalschlüssel" zum Lösen von Gleichungen) oder zur Berechnungen derjenigen Mengen, die produziert werden können, um vorgegebene Mengen von Ausgangsstoffen (Rohstoffen) genau zu verbrauchen.

Übungen zu Anwendungen Gauss-Verfahren

Übungen zum Verständnis Gauss-Verfahren