Grundlegende Definitionen der Matrizenrechnung

Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Schema von m · n Zahlen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind (Plural: **Matrizen**).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Zahlen in der Matrix (a_{11}, a_{12} usw.) heißen **Elemente** der Matrix. a_{ij} ist das Element in Zeile i und Spalte j.
Die Elemente sind doppelt durchnummeriert (nach Zeilen und nach Spalten); die zugehörigen Nummern heißen **Indizes** (Singular: **Index**). a_{ij} hat den **Zeilenindex** i und den **Spaltenindex** j.
Das **Format** einer Matrix gibt die Zeilen und Spaltenzahl an, d.h. eine ($m\times n$)-Matrix hat das Format ($m\times n$).

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0{,}5 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix.

Darin treten die folgenden Elemente auf: $a_{11} = 10$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = 3$; $a_{21} = 0{,}5$; $a_{22} = 71$; $a_{23} = -12$. A hat das Format (2×3).

Def. Zwei Matrizen sind genau dann gleich, wenn sie das gleiche Format haben und wenn sie in jedem Element übereinstimmen.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sonderfälle von Matrizen

Def. Eine Matrix, die nur aus einer Zeile besteht, heißt **Zeilenvektor**.

Bsp. $\vec{a}$ **=** (12 3 -1 0) ist ein Zeilenvektor
(Hinweis: Zeilenvektoren werden in ökonomischen Zusammenhängen oft für Stückkosten verwendet)

Def. Eine Matrix, die nur aus einer Spalte besteht, heißt **Spaltenvektor**.

Bsp. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ ist ein Spaltenvektor.

(Hinweis: Spaltenvektoren werden in ökonomischen Zusammenhängen oft für Mengenangaben – z.B. Bestellmengen - verwendet)

Def. Eine Matrix, die gleich viele Zeilen und Spalten hat, heißt **quadratische Matrix**. Eine $(n \times n)$-Matrix heißt quadratische Matrix der **Ordnung n**.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ist eine quadratische Matrix der Ordnung 3.

Def. Die Diagonale, die von den Elementen a_{11}, a_{22}, a_{33} usw. gebildet wird verläuft in der Matrix von links oben nach rechts unten. Sie heißt **Hauptdiagonale**. Eine Matrix, bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißt **obere Dreiecksmatrix**. Eine Matrix, bei der alle Elemente außer denen auf der Hauptdiagonalen gleich Null sind, heißt **Diagonalmatrix**.

Bsp. Bei der Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ wird die Hauptdiagonale durch die Elemente **2**, **1** und **8** gebildet.

A ist *keine* obere Dreiecksmatrix, da unterhalb des Diagonalelements 2 noch eine **4** steht.

$B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ ist dagegen eine obere Dreiecksmatrix; $C = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

Def. Die **quadratische Matrix** der Ordnung n, bei alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind und alle anderen Elemente gleich 0, heißt **Einheitsmatrix** der Ordnung n (Bezeichnung: $\mathbf{E_n}$)

Bsp. $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def. Gegeben ist die $(m\times n)$-Matrix A. Die $(n\times m)$-Matrix B, die man erhält, indem man bei A die Zeilen mit den Spalten vertauscht – oder anders ausgedrückt: die Elemente von A „an der Hauptdiagonalen spiegelt" heißt **transponierte Matrix** von A (Bezeichnung $\mathbf{A}^T$)

Bsp- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0,5 & 3 & -12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0,5 \\ 0 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$

Bem. Durch Transponieren wird ein Spaltenvektor zu einem Zeilenvektor und lässt sich einfacher schreiben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1,5 \end{pmatrix} = (\,2\;\;4\;\;1,5\,)^T$

So, das waren die wichtigsten Arten von Matrizen. Klar, dass man in der Matrizenrechnung nun auch mit ihnen rechnen muss.

Addition von Matrizen und Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl sind so gut wie selbsterklärend.

Eine weitere wichtige Rechenart ist die Matrizenmultiplikation:

Einführung am Sachbeispiel (zweistufiger Produktionsprozess)

Einführung Matrizenmultiplikation (innermathematisch)

Definition Matrizenmultiplikation