Gauß-Verfahren – Übersicht über die Anwendungen – mit Lösungen

gauss_anwendungen

1. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Aufgabe 1a Lösen Sie das folgende LGS

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 24 \\ -2x + y &= 9 \end{aligned}$$

Lösung : x = -51, y = -93

Aufgabe 1b Lösen Sie das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -8 \\ 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ -96 \\ 114 \end{pmatrix}$$

		-2	6	2	50
		4	2	-8	-96
		9	9	6	114
I	:	-2	6	2	50
-2 I -1 II	:	0	-14	4	-4
-9 I – 2 III	:	0	-72	-30	-678
I	:	-2	6	2	50
II	:	0	-14	4	-4
36 II – 7 III	:	0	0	354	4602
I – 0,01 III	:	-2	6	0	24
II – 0,01 III	:	0	-14	0	-56
0,003 III	:	0	0	1	13
I + 0,4286 II	:	-2	0	0	0
-0,071 II	:	0	1	0	4
III	:	0	0	1	13
-0,5 I	:	1	0	0	0
II	:	0	1	0	4
III	:	0	0	1	13

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2. Mehrstufige Produktionsprozesse:
Berechnung von (Endprodukt-)Mengen, die produziert werden können

Aufgabe 2 Gegeben ist die Rohstoffverbrauchsmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Wie viele ME der einzelnen Endprodukte E_1und E_2 können aus 2200 ME von R_1 und 1400 ME von R_2 hergestellt werden?

Es können 100 ME E_1 und 250 ME E_2 hergestellt werden.

3. „Steckbriefaufgaben" ganzrationaler Funktionen

Aufgabe 3a Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationaler Funktion 3.Grades mit einem lokalen Hochpunkt bei (–1 | 2) und einem Wendepunkt bei (0 | 0,5). *M heute Analysis GK, 128 A.6b*

***Ansatz**: $f(x)=a\,x^3+ b\,x^2 + c\,x + d$;*
$f\,'(x)= 3a\,x^2+ 2b\,x + c$;
$f\,''(x)= 6a\,x + 2b$;
W (0; 0,5) liegt auf G_f, also f (0) = 0,5, also d = 0,5;
W (0; 0,5) ist Wendepunkt, also $f\,''(0)=0$, also b = 0;
H (–1; 2) liegt auf G_f, also f (-1) = 2, also $-a - c + 0{,}5 = 2 \Leftrightarrow -a - c = 1{,}5$
H (–1; 2) ist rel. Hochpunkt; also $f\,'(-1) = 0$, also 3a + c = 0;
$f(x) = 0{,}75\,x^3 - 2{,}25\,x + 0{,}5$.
Kontrolle: $f''(-1) > 0$; also rel. Tiefpunkt;
$f'''(0) \neq 0$; also Wendepunkt.

Aufgabe 3b Eine ganzrationale Funktion vierten Grades verläuft durch den Punkt P(-2 | -4) und besitzt im Ursprung des Koordinatensystems ein lokales Minimum. Die Steigung ihrer Tangente an der Nullstelle x = -1 beträgt 3.

Lösung: $f(x) = 2\,x^4 + 7\,x^3 + 5\,x^2$

4. „Steckbriefaufgaben“ mit ökonomischen Anwendungen

Aufgabe 4a Bei der Produktion einer Ware ist die Abhängigkeit der Gesamtkosten K von der Produktionsmenge x durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades nach folgender Wertetabelle gegeben:

x	0	1	2	3
K (x)	9	14	16	18

Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion. *(BIO II; 157,4)*

Lösung: $K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 7{,}5x + 9$

Aufgabe 4b
Die Gesamtkosten einer Unternehmung werden durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben. Der Verkaufspreis je ME beträgt 69,5 GE. Die fixen Kosten betragen 100 GE. Die Gewinnschwelle liegt bei einer Ausbringungsmenge von 5 ME. Das Betriebsminimum liegt bei 7,5 ME. Bei einer Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 400 GE. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kosten, der Erlös- und der Gewinnfunktion. *(BIO II; 157,5)*

$E(x) = 69{,}5x$; $K(x) = 2x^3 - 30x^2 + 149{,}5x + 100$; $G(x) = -2x^3 + 30x^2 - 80x - 100$

5. Rang, Invertierbarkeit, Inverse u. Lösung lin. Gleichungssysteme mit der Inversen

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A. Ist A invertierbar? Wenn A invertierbar ist, bilden Sie A^{-1} und lösen Sie mit Hilfe der Inversen das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

<u>Rang</u>: $\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ Auf obere Dreiecksform gebracht hat die Matrix zwei Nichtnullzeilen, d.h. **<u>Rg (A) = 2</u>**.

<u>Invertierbarkeit</u>: Damit hat A den „vollen Rang“
(Rg (A) = Anzahl der Spalten = 2), also ist **<u>A invertierbar</u>**.

<u>Inverse</u>: $\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 0,1 & -0,3 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0,05 & -0,15 \\ 0 & 1 & 0,3 & 0,1 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,05 & -0,1,5 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

<u>Lsg. des LGS</u>: $\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,05 & -0,1,5 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -125 & 5 \\ 75 & -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$

Rang: $\begin{pmatrix} -125 & 5 \\ 75 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -125 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Auf obere Dreiecksform gebracht hat die Matrix nur *eine* Nichtnullzeile, d.h. **Rg (A) = 1**.

Invertierbarkeit: Damit hat A nicht den „vollen Rang" (Rg (A) < Anzahl der Spalten = 2), also **ist A nicht invertierbar**. Damit kann die Inverse auch nicht berechnet werden. Das LGS ist nicht eindeutig lösbar (ob es mehrdeutig lösbar ist oder unlösbar wäre mittels Gauß-Verfahrens zu untersuchen. Jedenfalls kann die Lösung nicht durch die Inverse berechnet werden.)

Eine Firma erzielt für ihre Ware einen Stückpreis von 100 GE. Die Gesamtkosten werden durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades dargestellt. Die fixen Kosten betragen 72 GE. Bei einer Ausbringungsmenge von 1 ME wird Kostendeckung erreicht, bei 9 ME wird ein maximaler Gewinn von 576 GE erzielt. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kosten, der Erlös- und der Gewinnfunktion. *(BIO II; 157,3)*