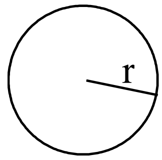
Kugeln und Kreise



Zu einem gegebenen Mittelpunkt M (m_1 | m_2)und einer positiven Zahl r kann man in der Ebene den Kreis M mit dem Radius r betachten. Er besteht aus allen Punkten X (x_1 | x_2) , deren Abstand von M genau r beträgt. (Genauer gesagt ist das die Kreislinie.)

Ein Kreis hat demnach die Gleichung
$|\ \vec{x} - \vec{m}\ | = r$ bzw.
$(|\vec{x} - \vec{m}\ |)^2 = r^2$ (**Vektorgleichung** des Kreises)
Daraus ergibt sich:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$, wobei $r > 0$.
oder: $x_1^2 - 2 m_1 \cdot x_1^2 + m_1^2 + x_2^2 - 2 m_2 \cdot x_2^2 + m_2^2 = r^2$, mit $r > 0$.
(**Koordinatengleichung** des Kreises.)

Entsprechendes gilt für Kugeln im Raum.

Aufstellung einer Vektor- und einer Koordinatengleichung bei gegebenem Mittelpunkt und Radius
Beispiel 1: K ist der Kreis mit Radius 5 um den Punkt M (3 | 8).

$$(| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} |)^2 = 25$$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 6 \cdot x_1 + 9 + x_2^2 - 16 \cdot x_2 + 64 = 25$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 6 \cdot x_1 + x_2^2 - 16 \cdot x_2 + 9 + 64 - 25 = 0.$

Die Gleichung lautet: K: $\underline{\underline{x_1^2 + x_2^2 - 6 \cdot x_1 - 16 \cdot x_2 + 48 = 0}}$.

Beispiel 2: K ist die Kugel mit Radius 10 um den Punkt M (5 | -2 | 6).

$$(| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} |)^2 = 100$$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 10 \cdot x_1 + 25 + x_2^2 + 4 \cdot x_2 + 4 + x_3^2 + 12 \cdot x_3 + 36 = 100$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 10 \cdot x_1 + x_2^2 + 4 \cdot x_2 + x_3^2 + 12 \cdot x_3 + 25 + 4 + 36 - 100 = 0$

Die Gleichung lautet: K: $\underline{\underline{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 - 35 = 0}}$.

Natürlich kann man die obige Fragestellung auch herumdrehen:

Bestimmung von Mittelpunkt und Radius aus einer gegebenem Koordinatengleichung
Beispiel 3: Gegeben ist die folgende Gleichung:

K: $x_1^2 + x_2^2 - 6 \cdot x_1 - 16 \cdot x_2 + 107 = 0.$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 20 \cdot x_1 + (20/2)^2 + x_2^2 - 8 \cdot x_2 + (8/2)^2 = (20/2)^2 + (8/2)^2 - 107$

$\Leftrightarrow (| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} |)^2 = 100 + 16 - 107 = 9$

K ist also der Kreis mit $\underline{\underline{\text{Radius 3}}}$ um den Punkt M $\underline{\underline{(-10 \mid 4)}}$.

Das klappt übrigens nicht immer:

Beispiel 4: Gegeben ist die folgende Gleichung:

K: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 12\, x_3 + 225 = 0$.

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2 \cdot x_1 + (2/2)^2 + x_2^2 + 22 \cdot x_2 + (22/2)^2 + x_3^2 - 12\, x_3 + (12/2)^2 = -225 + (2/2)^2 + (22/2)^2 + (12/2)^2$

$\Leftrightarrow (| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} |)^2 = -225 + 1 + 121 + 36 = -67 < 0$ Widerspruch!

D.h., was aussah, wie eine Kugelgleichung, war gar keine!

Abwandlungen der Kreis- und Kugelaufgaben arbeiten durchweg mit der Idee des Abstands:

Beispiele:

Problem	**Lösungsstrategie**
Untersuchen Sie, ob der Punkt P innerhalb der Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r liegt.	Abstand P-M berechnen. Ist er kleiner als r, so liegt P innerhalb von K, ist er gleich r, so liegt P auf der Kugeloberfläche („auf der Kugel“), ist er größer, liegt P außerhalb.
Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittepunkt M so , dass der Punkt P auf der Kugel liegt.	Abstand P-M berechnen. r = $\lvert\overrightarrow{MP}\rvert$. Kugelgleichung aufstellen.
Untersuchen Sie, ob die Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r die Ebene E schneidet.	Abstand E-M berechnen. Ist er kleiner als r, so gibt es einen Schnittkreis, ist er gleich r, so gibt es einen Berührpunkt, ist er größer, schneiden sich E und K nicht.
Bestimmen Sie den Abstand der Kugel K von der Ebene E (also den Abstand von E zum nächstgelegenen Punkt auf K)	Abstand E-M berechnen und r abziehen
Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittepunkt M so , dass K die Ebene E berührt.	Abstand E-M berechnen und r gleich diesem Abstand setzen. Gleichung aufstellen.
Untersuchen Sie, ob die Kugel K_1 mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 die Kugel K_2 mit Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 schneidet	Abstand M_1-M_2 berechnen. Ist er kleiner als $r_1 + r_2$, so gibt es einen Schnittkreis, ist er gleich r, so gibt es einen Berührpunkt, ist er größer schneiden sich die beiden Kugeln nicht.