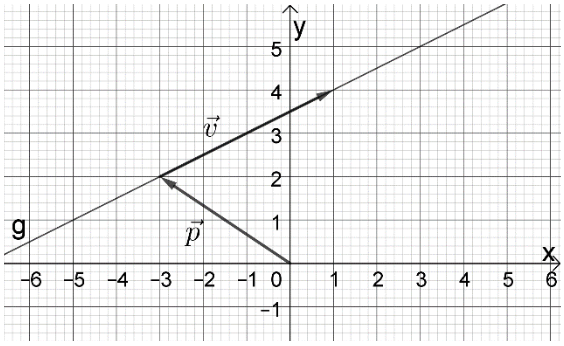
Geraden

Um eine Gerade anzugeben, benötigt man einen Ausgangspunkt und eine Richtung: Man geht also zu Punkt A (einem beliebigen Punkt auf der Gerade) und dann so weit wie man will in die Richtung der Geraden

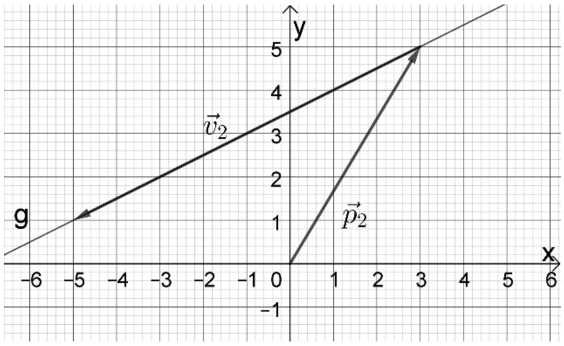
So kann man eine Gerade g in der folgenden Form darstellen: g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$; wobei $\vec{v}$ ungleich dem Nullvektor, $t \in \mathbb{R}$. Man nennt dies ***Parameterdarstellung*** der Geraden. Dabei ist $\vec{p}$ der sogenannte ***Stützvektor***, d.h. ein Ortsvektor irgendeines Punktes P, der auf der Geraden g liegt. $\vec{v}$ ist der ***Richtungsvektor***. Es handelt sich beim Richtungs-vektor um einen Verschiebungsvektor zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Geraden.



Beispiel: Dargestellt ist die Gerade, die durch den Punkt **A**(-3|2) geht und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat.

Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Dabei ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Stützvektor.



Bemerkung: Tauscht man $\vec{p}$ gegen den Ortsvektor eines beliebigen anderen Punktes auf der Geraden aus und $\vec{v}$ gegen irgend einen anderen Vektor mit der gleichen Richtung, so erhält man immer noch die gleiche Gerade:

Beispiel: (3 |5) liegt auf der Geraden g und $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches des alten Richtungsvektors, also ist

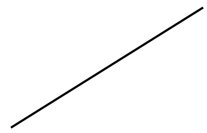
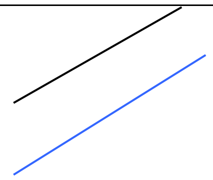
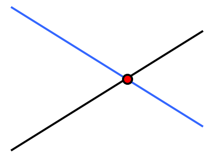
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ eine andere Darstellung derselben Geraden wie oben.

Aufstellen der Geradengleichung aus zwei Punkten P und Q:
Sind zwei Punkte P und Q gegeben, so ermittelt man den Richtungsvektor der Geraden durch P und Q, indem man P von Q subtrahiert.

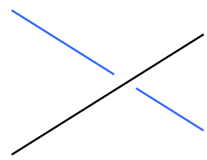
g : $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$, $t \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehungen von Geraden

Bei zwei Geraden g und h *in der Ebene* gibt es drei Möglichkeiten:
Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeit hinzu:

1. Sie sind **identisch** (also g = h),	
2. sie sind **parallel** (also g || h) oder	
3. sie **schneiden** sich.	

Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeiten hinzu:

4. sie sind **windschief**.	Die Zeichnung ist so gemeint, dass die eine Gerade „tiefergelegt“ ist und daher die andere nicht schneidet. 

Diese verschiedenen Möglichkeiten heißen ***Lagebeziehungen***.

Untersuchung auf die gegenseitige Lage:

Gegeben sind die Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1$; $s\in\mathbb{R}$, wobei $\vec{v}_1 \neq \vec{o}$
und g_2: $\vec{x} = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$; $t\in\mathbb{R}$., wobei $\vec{v}_2 \neq \vec{o}$.

Zuerst untersucht man, ob die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ kollinear ist, also ob es ein $a\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v}_1 = a\cdot\vec{v}_2$. (Man untersucht dazu, ob bei allen Einzelgleichungen dieselbe Zahl für a herauskommt.).
Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

<u>1. Fall: Sie sind kollinear</u>, so reicht es, zu untersuchen, ob ein Punkt, der bekanntermaßen auf g_1 liegt (z.B. der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$) auch auf g_2 liegt. Dazu macht man die Punktprobe: $\vec{p} = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$. Ist diese Vektorgleichung lösbar (d.h., kommt bei beiden Einzelgleichungen derselbe Wert für t heraus), so sind g_1 und g_2 identisch, ansonsten sind sie parallel.

<u>1. Fall: Sie sind nicht kollinear</u>
Bei Geraden *<u>in der Ebene</u>* bleibt nur der Fall übrig, dass die Geraden sich schneiden. Zur Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Geraden gleich: $\vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$; Man erhält ein Gleichungssystem: zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wenn wir schon ausgeschlossen haben, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_1$ kollinear sind, kann man sogar sicher sein, dass dieses eindeutig lösbar ist. Damit berechnet man s und t und setzt ein, um den Schnittpunkt zu ermitteln.

Lore Lorentz
LORE LORENTZ SCHULE

Bei Geraden *im Raum* bleiben zwei Möglichkeiten über: Die Geraden können sich schneiden oder aber windschief sein. Auch hier setzt man die Geraden gleich:

$\vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$;

Man erhält ein Gleichungssystem: drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es reicht zunächst, nur zwei Gleichungen zu betrachten, um s und t zu berechnen. Dann setzt man die ermittelten Werte für s und t in die Geradengleichungen ein und schaut, ob dabei dieselben Punkte herauskommen. Stimmen diese beiden Punkte überein, so hat man den Schnittpunkt, andernfalls sind die Geraden windschief.

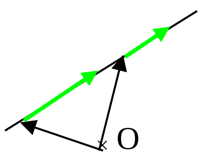
g_1: $\vec{x} = \vec{p}_1 + s\cdot\vec{p}_1$; $s \in \mathbb{R}$,
g_2: $\vec{x} = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$; $t\in\mathbb{R}$.

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Kollinearität:
Ansatz: $\overrightarrow{v_1}1 = a\cdot\overrightarrow{v_2}2$
(kollinear, wenn alle Gleichungen denselben Wert für a ergeben)

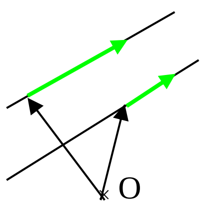
kollinear

Punktprobe, ob der Punkt P_1, der zu Stützvektor von g_1 gehört, auch auf g_2 liegt
Ansatz: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$

P_1 liegt auf g_2
Die Geraden sind identisch: $g_1 = g_2$.



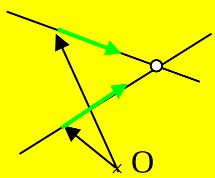
P_1 liegt nicht auf g_2
Die Geraden sind parallel: $g_1 \parallel g_2$.



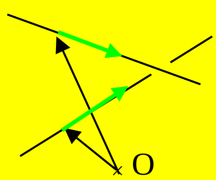
nicht kollinear

Untersuchung auf Schnittpunkte *im Raum:**
Ansatz: $\overrightarrow{p_1} + s\cdot\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{p_2} + t\cdot\overrightarrow{v_2}$
Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Man wählt zwei der Gleichungen aus und löst das entsprechende Gleichungssystem und berechnet daraus die Werte von s und t.
Einsetzen in die obige Vektorgleichung ergibt zwei Vektoren. Stimmen beide überein, so hat man den Schnittpunkt – ansonsten gibt es keinen Schnittpunkt.

Schnittpunkt
Die Geraden schneiden sich.



kein Schnittpunkt
Die Geraden sind windschief.



*Bei Geraden *in der Ebene* ist alles viel einfacher: Da ist an dieser Stelle (bei „nicht kollinear“) schon klar, dass sich g $_1$ und g $_2$ schneiden. Zur Berechnung des

Schnittpunktes löst man das Gleichungssysstem $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$ und setzt dann wieder ein.