1 Vektorrechnung als Teil der Linearen Algebra - Einleitung

1.1 Einführungsbeispiel

Archäologen untersuchen eine neu entdeckte Grabanlage aus der ägyptischen Frühgeschichte. Damit jeder ausgegrabene Fund auch im Zusammenhang seiner genauen Lage am Fundort dokumentiert werden kann, wird zunächst Netz von senkrecht zueinander stehenden Seilen gespannt. Während die Archäologen in der Regel eine Benennung aus Zahlen und Buchstaben verwenden, soll ein Punkt in der Ebene hier mit zwei Zahlen bezeichnet werden – wie im bekannten Kartesischen Koordinatensystem. Die Einheiten betragen jeweils 1 m. An den Punkten A (-100 | 100), B (0 | -100) und C (200 | 0) lassen sich die Ecken eines Gebäudes nachweisen, das einen rechteckigen Grundriss gehabt haben muss.

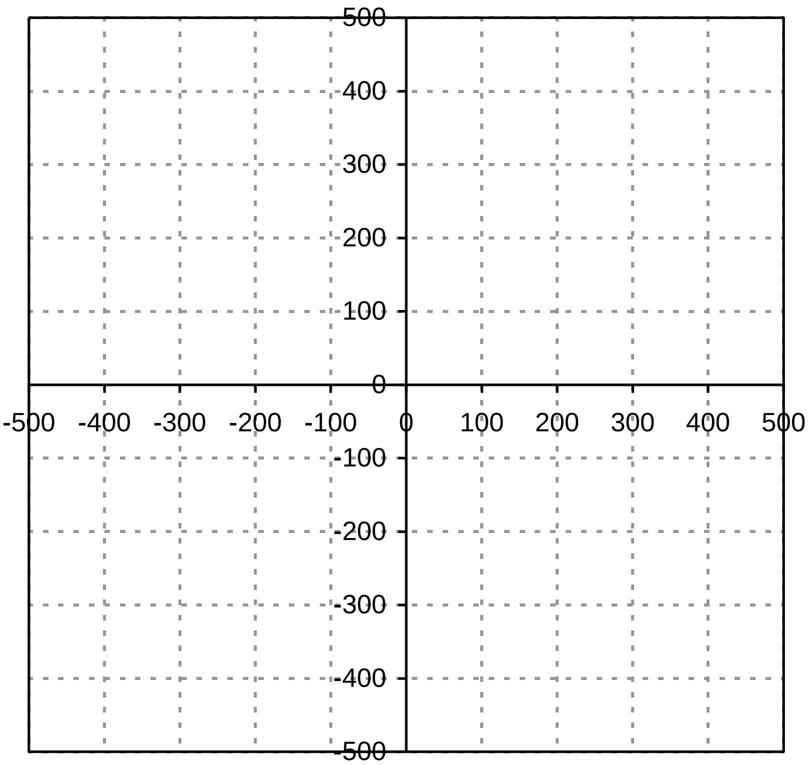
Aufgabe 1

a) Zeichne die Punkte ein.

b) Wo muss die 4. Ecke (D) gelegen haben?

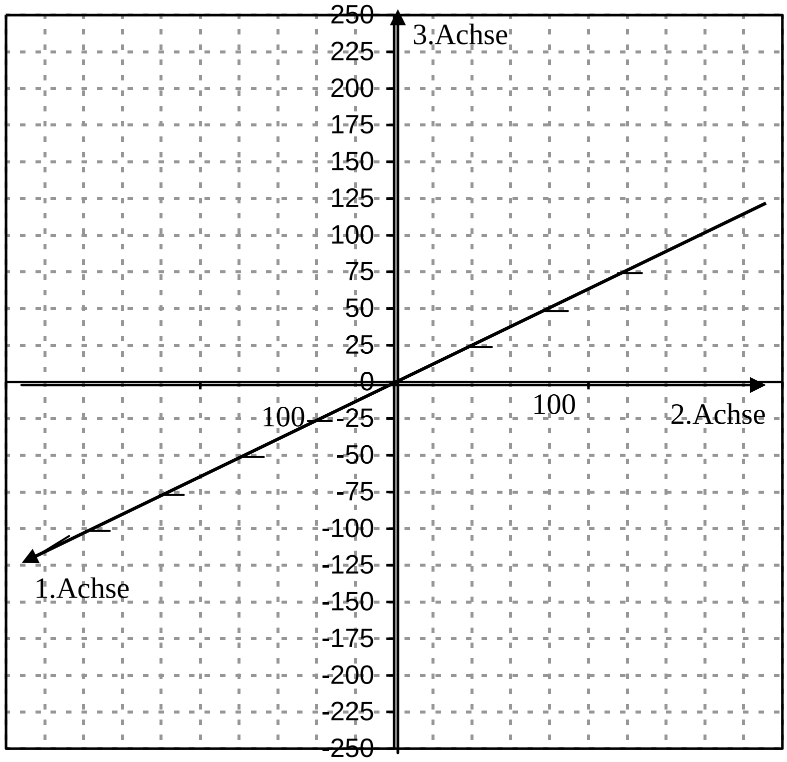
c) Gib an, wie viele Einheiten man in x- bzw. y-Richtung gehen muss, um von A nach B und um von D nach C zu kommen. Zeichne die beiden Wege als Pfeil ein.

d) Berechne die Seitenlängen und überprüfe, ob es sich um einen quadratischen Grundriss handelt. Erinnerung: Satz des Pythagoras.



Weitere Untersuchungen ergeben, dass es sich bei dem Bauwerk um eine Pyramide gehandelt haben muss. Aus der Steigung der noch vorhandenen Mauerreste ermitteln die Archäologen, dass die Pyramide ca. 150 m hoch gewesen sein muss. Um die genaue Lage der Spitze S anzugeben, sind nun 3 Koordinaten nötig.

e) Ermittle diese Koordinaten und zeichne das „Schrägbild“ der Pyramide.



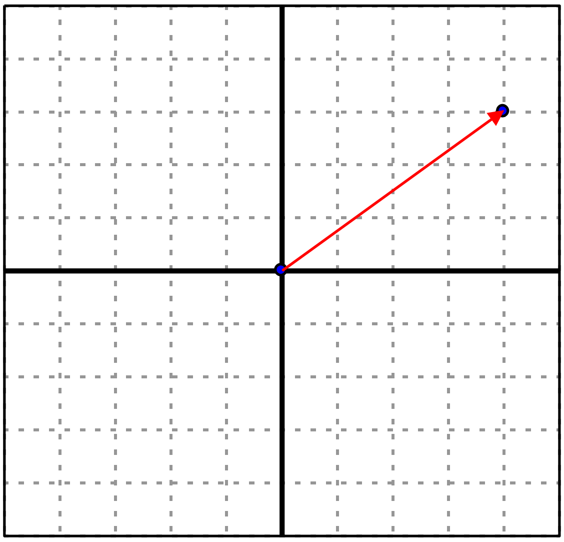
In 1c) fällt auf, dass die „Wegbeschreibung“ von A nach B mit der von D nach C genau übereinstimmt – in Länge, Richtung und Orientierung. Gleiche Orientierung heißt dabei, dass die Pfeilspitze sich an der gleichen Seite befindet. Insofern kann man die beiden eingezeichneten Pfeile miteinander identifizieren: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Alle „derartigen“ Pfeile, die also in Richtung, Länge und Orientierung übereinstimmen (s.u.), bilden zusammen den Vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \end{pmatrix}$.

Definition: *Vektoren* sind „Zahlentupel“, also mehrere Zahlen als „Paket“. Die Zahlen heißen *Koordinaten* oder *Komponenten*. Die Anzahl der Koordinaten heißt *Dimension* des Vektors. Wir werden Vektoren in der Regel als Spaltenvektoren verwenden, d.h. wir schrieben die Zahlen übereinander. Vektoren werden mit kleinen Buchstaben und einem Pfeil darüber bezeichnet, z.B. $\vec{x}$. Ein dreidimensionaler Vektor hat demnach die Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 100 \\ -200 \end{pmatrix}$ ist also ein zweidimensionaler Vektor mit der x_1-Koordinate 100 und der x_2-Koordinate –200.

1.2 Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren – der Ortsvektor

Der Grundgedanke der Analytischen Geometrie, den Rene Descartes im 17. Jahrhundert hatte, besteht darin, geometrische Gebilde wir Geraden, Ebenen, Kreise etc. als Mengen von Punkten aufzufassen und mit diesen Punkten zu *rechnen*, um so geometrische Probleme zu lösen. Wie kann man nun mit Punkten rechnen? Sicherlich ist es nicht sinnvoll, Punkte miteinander zu addieren oder zu multiplizieren. Das wird deutlich, wenn Sie sich nur einmal zwei Eckpunkte eines Tisches vorstellen. Um rechnen zu können, benötigen wir Zahlen. Nun ist Ihnen die Beziehung zwischen Punkten und Zahlen nicht neu: Im Kartesischen Koordinatensystem (benannt nach Descartes) wird ein Punkt durch seine Koordinaten ausgedrückt.



Der Punkt P hat die Koordinaten (4 | 3).

Der Weg vom Ursprung O (0 | 0) nach P ist demnach $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

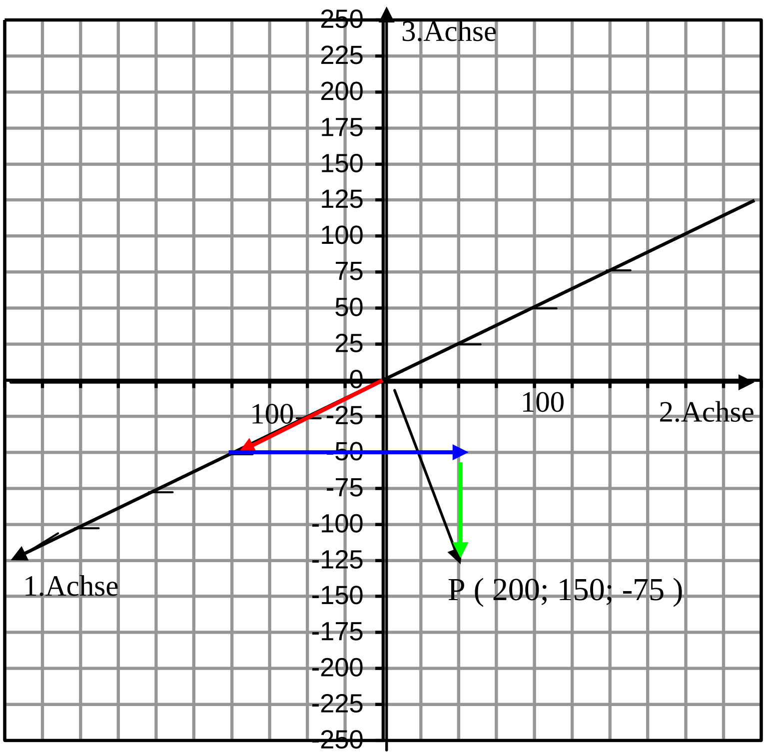
Man nennt dies den Ortsvektor von P.

Allgemein gilt: Dem Punkt X (x_1 | x_2) hat den *Ortsvektor* $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, entsprechend hat ein Punkt im Raum, der die Koordinaten (x_1 | x_2 | x_3) hat, den Ortsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

An dieser Stelle könnte man sich fragen, wozu der neue hochtrabende Vektorbegriff gut sein soll, wenn er letztlich doch nur die längst bekannten Punkte beschreibt – wobei die Koordinaten eben übereinander statt nebeneinander stehen. Wozu also „Vektoren“? Weil man sie auch anders auffassen und anderes damit anstellen kann: Erinnerung: Wir haben Vektoren als Wegbeschreibungen unabhängig vom Ausgangspunkt aufgefasst. Startet man im Ursprung und folgt dem Vektor $\vec{p}$, so landet man beim Punkt P. Startet man aber woanders und folgt diesem Vektor, so kann man auch weiter kommen ...

1.3 Bemerkung zum Koordinatensystem:

Neu ist das Einzeichnen von Punkten (und Strecken in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Um den Punkt P (200; 150; -75) einzuzeichnen, startet man im Ursprung, geht dann 200 LE in Richtung der 1. Achse (im nebenstehenden Bild zwei Markierungen), dann 150 LE in Richtung der 2. Achse (6 Markierungen) und 75 LE *entgegen* der 3. Achse (also 3 Markierungen *nach unten*).



1.4 Verschiebungs- oder Verbindungsvektoren

In 1.2 wurde versprochen, ein Vektor sei noch zu etwas anderem gut, als einen Punkt zu beschreiben – das tun er wie beschrieben in seiner Eigenschaft als Ortsvektor. Man kann ihn aber auch als Wegbeschreibung auffassen, die nicht auf einen bestimmten Startpunkt festgelegt ist. Die Wegbeschreibung „gehe 12 Längeneinheiten (LE) in Richtung der ersten Achse und 8 LE entgegen der zweiten Achse" lässt sich nun auf jeden beliebigen Punkt anwenden. Vom Ursprung 0 aus führt sie einen zum Punkt P (12 | -8), vom Punkt A (100 | 70) aus gehend dagegen zum Punkt B (112 | 62) und vom Punkt C (-0,5 | 9,1) ausgehend zum Punkt D (11,5 | 1,1). Damit entsprechen der Pfeil vom Ursprung zu P und der Pfeil von A nach B und der von C nach D alle demselben Vektor. Man nennt kann einen Vektor also durch einen derartigen „Repräsentanten" angeben und ihn z.B. $\overrightarrow{OP}$ nennen oder $\overrightarrow{AB}$ oder $\overrightarrow{CD}$. Es gilt unter diesen Umständen: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Sind zwei Punkte A und B gegeben, so nennt man den Vektor, zu dem der Weg (oder anders ausgedrückt: der Pfeil) von A nach B gehört, den Verbindungsvektor von A und B (da man ihn einzeichnen würde, indem man A und B verbindet) oder den Verschiebungsvektor von A nach B (da der derjenigen Parallelverschiebung aller Punkte der Ebene oder des Raums entspricht, die A auf B abbildet).

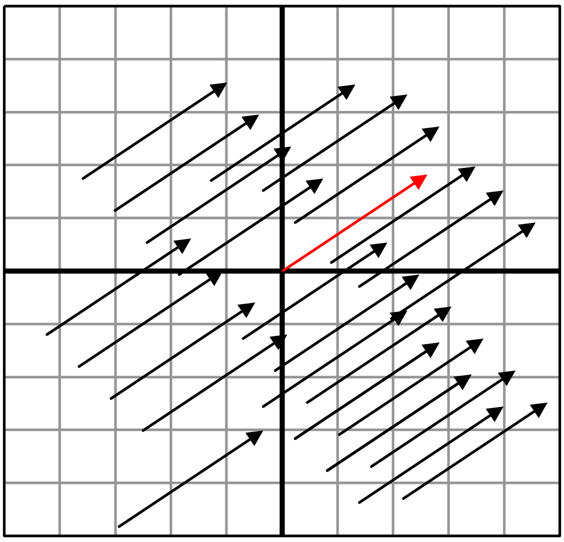
Man nennt diesen Verschiebungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und berechnet seine Koordinaten, indem man die Koordinaten des Punktes A von denen des Punktes B abzieht.

Beispiel: Sind die Punkte A (2 | 8 | 5) und B (14 | -1 | 7) gegeben, so ist der Vektor

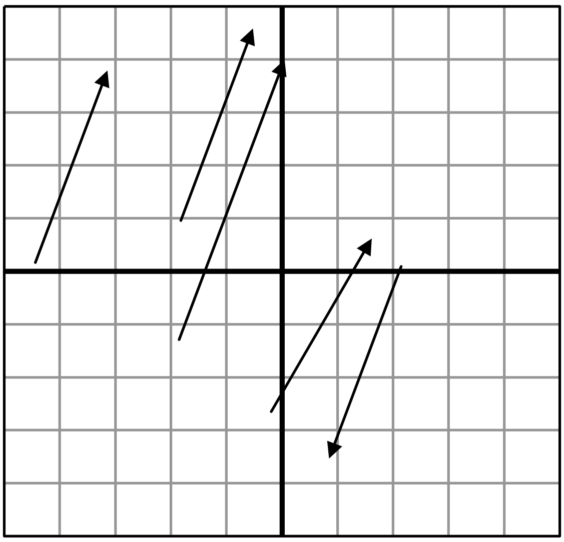
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14-2 \\ 8-(-1) \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.6 Eine weitere Auffassung von Vektoren

Man kann Vektoren auch als Menge aller Pfeile auffassen, die die gleiche Richtung, Orientierung und Länge haben. Das gilt für $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ aus **1.1**, aber ja auch noch für den Pfeil von (350 | 900) nach (500 | 700) und unendlich viele weitere Pfeile. „Gleiche Richtung“ ist dabei unabhängig davon, an welchem Ende die Pfeilspitze liegt. Dementsprechend können Pfeile mit gleicher Richtung entweder die gleiche oder die entgegengesetzte Orientierung haben, je nachdem, wo ihre Pfeilspitzen liegen. (Siehe Abb. unten rechts)



Lauter vektorgleiche Pfeile. Die Lage des einzelnen Pfeils im Koordinatensystem spielt dabei keine Rolle.



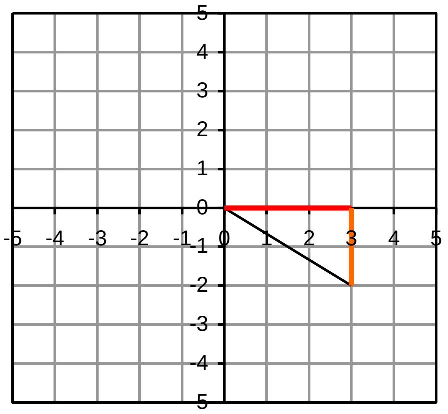
Der erste Pfeil ist vektorgleich zum zweiten, aber zu keinem anderen der abgebildeten Pfeile. Der dritte hat zwar dieselbe Richtung und Orientierung, aber eine andere Länge. Der vierte hat eine andere Richtung. Der fünfte stimmt in

Länge und Richtung mit dem ersten überein, aber nicht in der Orientierung.

Die hier benutzten anschaulichen Begriffe Länge, Richtung und Orientierung müssen wir nun noch klar definieren, so dass wir mit ihnen auch rechnerisch arbeiten können.

1.7 Betrag eines Vektors

Wenn wir einen Vektor als Wegbeschreibung auffassen, wird man sich auch für die *Länge* des Weges (Luftlinie) interessieren. Um die Längen von Pfeilen berechnen zu können, benutzen wir den Satz des Pythagoras. Ist A mit den Koordinaten (a_1 ; a_2) ein Punkt in der Ebene, so lässt sich die Länge des Pfeils vom Ursprung nach A mit der Formel $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ berechnen.



Def.: Der Betrag eines Vektors $\vec{x}$ ist die Länge der zugehörigen Pfeile.

Bem.: Für einen zweidimensionalen Vektor $\vec{x}$ gilt: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Beispiel: Der Betrag des Vektors $\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right|$ entspricht der Hypothenuse c. Laut Satz des Pythagoras muss ihr Quadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate sein, also $3^2 + (-2)^2$, woraus folgt, dass $\left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx \underline{\underline{3{,}606}}$.

Bem.: Für einen dreidimensionalen Vektor $\vec{x}$ gilt: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Das ergibt sich aus der zweimaligen Anwendung des Satzes des Pythagoras.

Beispiel: $\left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Das heißt, der Punkt (0 ; 3 ; 4) ist 5 LE vom Ursprung entfernt.

Anwendungen: Den Betrag eines Vektors benötigen wir überall da, wo es um Entfernungen, Abstände, Seitenlängen oder ähnliches geht.

Bem.: Einen Vektor, dessen Betrag 1 ist, nennt man Einheitsvektor.

Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$ etc. sind Einheitsvektoren.

Aufgabe: Überprüfe, ob $\begin{pmatrix}0,6\\0,8\\0\end{pmatrix}$ ein Einheitsvektor ist.

1.7 Nullvektor und Gegenvektor

Wenn man einfach stehen bleibt, stimmen Anfangs- und Endpunkt überein: Wenn man das, was man zurückgelegt hat, überhaupt als Weg bezeichnen will, ist es ein seltsamer: Ein Weg der Länge null, der außerdem keine Richtung hat. Dem entspricht der Nullvektor: $\vec{o} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Für jeden Punkt P gilt: $\overrightarrow{PP} = \vec{o}$.

In unserer Idee vom Vektor als Wegbeschreibung geht es nun um den *Rückweg*. Um dessen Beschreibung zu erhalten, drehen wir die Vorzeichen aller Koordinaten um:

$-\vec{x} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$ bzw. im Dreidimensionalen: $-\vec{x} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\end{pmatrix}$. Damit ändert der Vektor seine Orientierung – die Pfeilspitze zeigt in die andere Richtung.

Der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$ ist $\overrightarrow{BA}$, was also dasselbe ist wie $-\overrightarrow{AB}$.

Beispiel: Der Gegenvektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ ist $-\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Bem.: Addiert man Vektor und Gegenvektor, so erhält man den Nullvektor – das ist eben wie erst einen Weg zu gehen und dann den entsprechenden Rückweg anzutreten: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$