2 Rechnen mit Vektoren - Linearkombinationen

2.1 Einstiegsbeispiel

Es finden sich Hinweise, dass die Pyramide dem Pharao Sesistros zuzuordnen ist. Fragmente eines altägyptischen Papyrus geben Hinweise auf einen Gang, der zu einer Schatzkammer führt. Es gelingt, die Beschreibungen der einzelnen Streckenteile des Weges zu entschlüsseln. Bezogen auf das obige Koordinatensystem lag der Eingang des Gangs im Punkt E (100 ; -50 ; 0). Die einzelnen Streckenteile müssen den folgenden Vektoren entsprechen:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -50 \\ 100 \\ -12 \end{pmatrix},\ \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge, in der die Wegstrecken aneinandergesetzt waren, lässt sich dem Dokument aber nicht entnehmen.

a) Welche Streckenteile gehören zu ansteigenden Gängen, welche zu abfallenden?

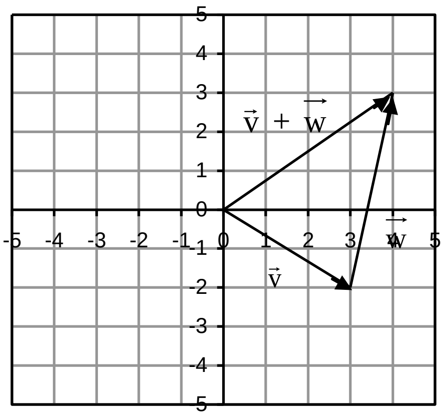
b) Du startest einen ersten Versuch und gehen davon aus, dass der Weg ausgehend vom Eingang mit dem Wegstück $\vec{w}_1$ beginnt und sich dann $\vec{w}_2$ anschließt, $\vec{w}_3$ und zum Schluss $\vec{w}_4$. Wie lauten unter diesen Voraussetzungen die Koordinaten der Schatzkammer?

c) Lassen sich – ohne dass die Reihenfolge der Gänge bekannt ist – Aussagen über die Lage der Schatzkammer machen?

2.2 Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt elementweise (also so, wie man es erwartet).

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}.$$



Beispiel: $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Graphische Darstellung:

Die Addition von Vektoren lässt sich graphisch darstellen, indem man die entsprechenden Pfeile „hintereinanderschaltet“: Dargestellt ist die Addition von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Die Summe ist $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Aus der Darstellung ergibt sich direkt die Dreiecksregel der Vektoraddition:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Das heißt, die Addition von Vektoren, die durch ihren Start- und Zielpunkt angegeben sind, ist nicht schwieriger als Domino zu spielen:

Genau wie man beim Domino zwei Steine aneinanderlegen kann, wenn dabei die zueinander zeigenden Felder übereinstimmen, kann man den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und den Vektor $\overrightarrow{QR}$ bequem addieren: Sie ergeben den Vektor $\overrightarrow{PR}$. Entscheidend sind also nur der Startpunkt des ersten und der Zielpunkt des zweiten Vektors, wie ja auch beim Domino nach dem Aneinanderlegen zweier Steine nur noch die Felder „zählen“, die außen liegen.

Und genau wie beim Domino kann man auf diese Weise ganze Vektorketten bilden. So gilt:

Bsp. 1: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

Bsp. 2: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PP} = \vec{o}$.

2.3 Skalare Multiplikation

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar erfolgt elementweise (also so, wie man es erwartet).

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}}}.$

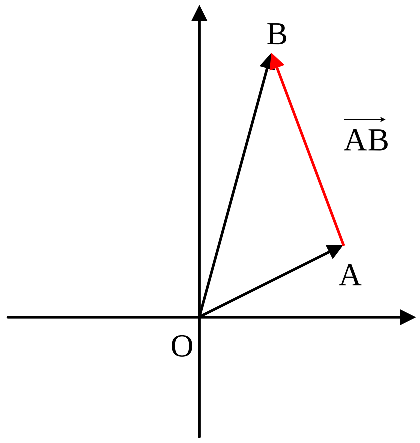
Bemerkung 1: Die Multiplikation mit 2 verdoppelt den Betrag des Vektors, Richtung und Orientierung ändern sich nicht. Die Multiplikation eines Vektors mit einer negativen Zahl ändert dagegen die Orientierung (bei gleicher Richtung).

Bemerkung 2: Die Multiplikation eines Vektors mit -1 ergibt den Gegenvektor.

2.4 Subtraktion von Vektoren, Verschiebungsvektoren und Abstände

Den Gegenvektor kennen wir schon längst. Mit den neu eingeführten Begriffen wird klar: der Gegenvektor ist das –1-fache oder einfach das negative des entsprechenden Vektors. Auch die Idee, zweier Vektoren voneinander zu subtrahieren, ist uns bereits zu Beginn begegnet, als wir zum ersten Mal Verschiebungsvektoren bestimmt haben. Nun können wir sagen: Um nun einen Vektor vom anderen zu subtrahieren, addiert man den Gegenvektor:

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix}.$$



Da wir Vektoren als Wegbeschreibungen eingeführt haben, betrachten wir nun den Weg von einem gegebenen Punkt (A) zum anderen (B). Um von A nach B zu gelangen, kann man zuerst von A zum Ursprung gehen und dann vom Ursprung zum Punkt B. Es gilt also:

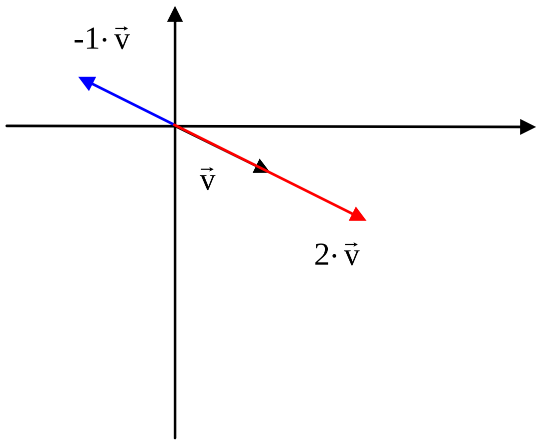
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ oder einfacher: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Beispiel: A (3 ; -7 ; 10), B (21 ; -2 ; -9). Dann gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 21 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}}}.$$

Um den Abstand zweier Punkte A und B zu ermitteln, bestimmt man zunächst den entsprechenden Verschiebungsvektor und berechnet dann dessen Betrag $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|$.

Beispiel: Sind S (20 ; -40 ; 100) und T (60 ; 0 ; 90) gegeben, so ist der Abstand von S und T $|\overrightarrow{ST}| = \left|\begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(40^2 + 40^2 + (-10)^2)} = \sqrt{3300} \approx \underline{\underline{57{,}45}}$.



2.5 Richtung und Kollinearität

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ≠ 0 ändert nichts an der Richtung. Damit ist es möglich, zu überprüfen, ob zwei Vektoren die gleiche Richtung haben.

Zwei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ (die ungleich dem Nullvektor sind) haben genau dann die selbe Richtung, wenn $\vec{w}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ist. Zwei solche Vektoren nennt man *kollinear*. Anders ausgedrückt:

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w} \neq \vec{o}$ sind kollinear ⇔ es gibt eine Zahl a, so dass $a \cdot \vec{w} = \vec{v}$.

Beispiel: **Überprüfung auf Kollinearität**:

Sind $\begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 45 \\ -30 \end{pmatrix}$ kollinear?

$a \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -30 \end{pmatrix}$

Die erste Zeile ergibt: $a \cdot (-18) = 45 \mid :(-18)$

⇔ $a = -45/18 = -5/2$

Probe mit der zweiten Zeile: $12 \cdot 5/2 = -30$, also sind beide kollinear.

2.5 Linearkombinationen

Wenn wir Vektoren nun miteinander addieren und mit Skalaren multiplizieren können, dann doch auch beides zusammen:

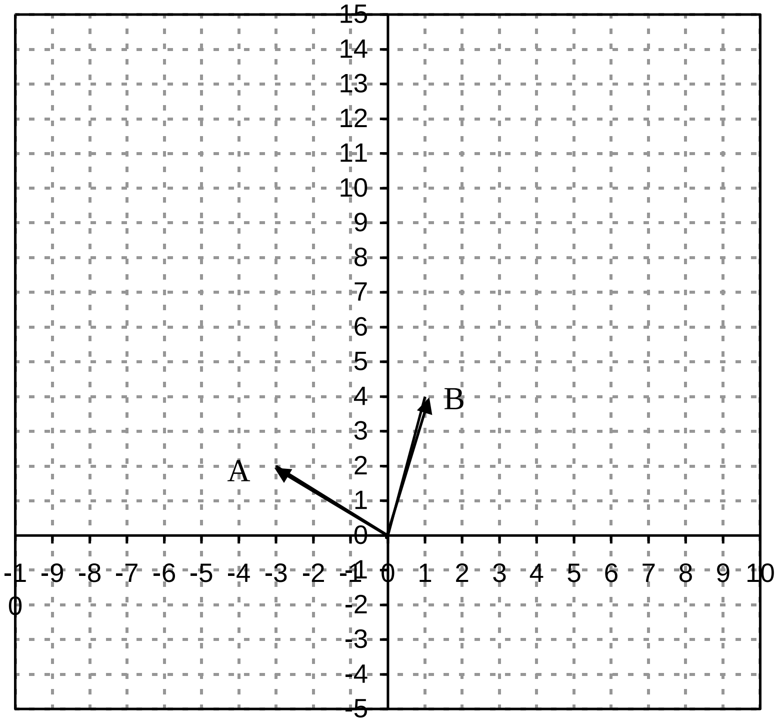
Gegeben sind z.B. die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Nimmt man nun Vielfache dieser beiden Vektoren und addiert sie, so erhält man einen neuen Vektor. Man nennt ihn eine Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$. So ist z.B. 3 $\vec{v}$ + 5 $\vec{w}$

$= 3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+5\cdot 6 \\ 3\cdot 5+5\cdot(-11) \\ 3\cdot 10+5\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -40 \\ 70 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Fingerübungen zum Thema Vektoren und Linearkombinationen

Gegeben sind mehrere Vektoren, z.B. v_1, v_2 und v_3, dann heißt eine Summe von Vielfachen dieser Vektoren Linearkombination von v_1, v_2 und v_3.



a) Lies die Koordinaten der beiden Punkte A und B sowie der beiden Vektoren a = $\overrightarrow{OA}$ und b = $\overrightarrow{OB}$ ab.

b) Zeichne die Vektoren a + b, a – b und –2 a + 3 b ein. Gib an, welche Linearkombination von a und b genau dem Verschiebungsvektor $\overrightarrow{AB}$ entspricht.

c) Bestimme zwei Zahlen r und s, so dass r+s möglichst groß ist, sich aber r a + s b noch in das obige Diagramm einzeichnen lässt. (Probierlösung).

d) Berechne die Länge von a, von b und von a+b. Vergleiche |a+b| mit |a| + |b|. Untersuche, ob es auch Vektoren v und w gibt, bei denen gilt: |v+w| = |v| + |w|

e) Zeichne den Vektor $(\ 9\ 8\ )^T$ ein. Bestimme r und s so, dass $(\ 9\ 8\ )^T = r\,a + s\,b$.