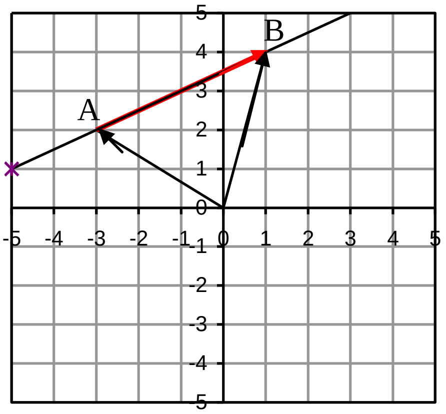
3 Geraden in Parameterform

Um eine Gerade anzugeben, benötigt man einen Ausgangspunkt und eine Richtung: Man geht also zu Punkt A (einem beliebigen Punkt auf der Gerade) und dann so weit wie man will in die Richtung der Geraden

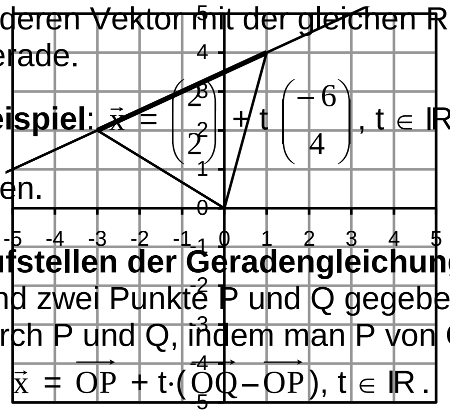
So kann man eine Gerade g in der folgenden Form darstellen: g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$; wobei $\vec{v}$ ungleich dem Nullvektor, $t \in \mathbb{R}$. Man nennt dies *Parameterdarstellung* der Geraden. Dabei ist $\vec{p}$ der sogenannte *Stützvektor*, d.h. ein Ortsvektor irgend eines Punktes P, der auf der Geraden g liegt. $\vec{v}$ ist der *Richtungsvektor*. Es handelt sich beim Richtungsvektor um einen Verschiebungsvektor zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Geraden.



Beispiel: Dargestellt ist die Gerade, die durch den Punkt **A** (-3 ; 2) geht und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat. Gleichung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Stützvektor.

Bemerkung: Tauscht man $\vec{p}$ gegen den Ortsvektor eines beliebigen anderen Punktes auf der Geraden aus und $\vec{v}$ gegen irgend einen anderen Vektor mit der gleichen Richtung, so erhält man immer noch die gleiche Gerade.



Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. ist eine andere Darstellung derselben Geraden wie oben.

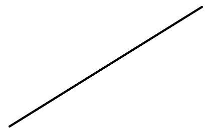
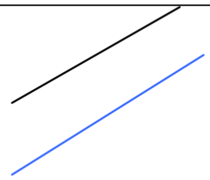
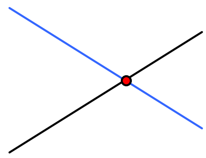
Aufstellen der Geradengleichung aus zwei Punkten P und Q:

Sind zwei Punkte P und Q gegeben, so ermittelt man den Richtungsvektor der Geraden durch P und Q, indem man P von Q subtrahiert.

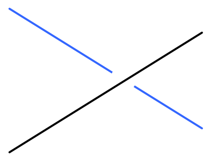
g : $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$, $t \in \mathbb{R}$.

Lagebeziehungen von Geraden

Bei zwei Geraden g und h *in der Ebene* gibt es drei Möglichkeiten:
Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeiten hinzu:

1. Sie sind identisch (also g = h),	
2. sie sind parallel (also g || h) oder	
3. sie schneiden sich.	

Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeiten hinzu:

4. sie sind windschief.	Die Zeichnung ist so gemeint, dass die eine Gerade „tiefergelegt“ ist und daher die andere nicht schneidet. 

Diese verschiedenen Möglichkeiten heißen Lagebeziehungen.

Untersuchung auf die gegenseitige Lage:

Gegeben sind die Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1$; $s \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{v}_1 \neq \vec{o}$
und g_2: $\vec{x} = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$; $t \in \mathbb{R}$., wobei $\vec{v}_2 \neq \vec{o}$.
Zuerst untersucht man, ob die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ kollinear ist, also ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v}_1 = a \cdot \vec{v}_2$. (Man untersucht dazu, ob bei allen Einzelgleichungen die selbe Zahl für a herauskommt.).Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:
<u>1. Fall: Sie sind kollinear</u>, so reicht es, zu untersuchen, ob ein Punkt, der bekanntermaßen auf g_1 liegt (z.B. der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$) auch auf g_2 liegt.
Dazu macht man die Punktprobe: $\vec{p} = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$. Ist diese Vektorgleichung lösbar (d.h., kommt bei beiden Einzelgleichungen derselbe Wert für t heraus), so sind g_1 und g_2 identisch, ansonsten sind sie parallel.
<u>1. Fall: Sie sind nicht kollinear</u>
Bei Geraden *<u>in der Ebene</u>* bleibt nur der Fall übrig, dass die Geraden sich schneiden.
Zur Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Geraden gleich: $\vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$;

Man erhält ein Gleichungssystem: zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wenn wir schon ausgeschlossen haben, dass $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_1$ kollinear sind, kann man sogar sicher sein, dass dieses eindeutig lösbar ist. Damit berechnet man s und t und setzt ein, um den Schnittpunkt zu ermitteln.
Bei Geraden *im Raum* bleiben zwei Möglichkeiten über: Die Geraden können sich schneiden oder aber windschief sein. Auch hier setzt man die Geraden gleich: $\vec{p}_1 + s\cdot\vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t\cdot\vec{v}_2$;
Man erhält ein Gleichungssystem: drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es reicht zunächst, nur zwei Gleichungen zu betrachten, um s und t zu berechnen. Dann setzt man die ermittelten Werte für s und t in die Geradengleichungen ein und schaut, ob dabei dieselben Punkte herauskommen. Stimmen diese beiden Punkte überein, so hat man den Schnittpunkt, andernfalls sind die Geraden windschief.

Vorgehen bei der Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden

g_1: $\vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1$; $s \in \mathbb{R}$,

g_2: $\vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$; $t \in \mathbb{R}$.

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Kollinearität:

Ansatz: $\vec{v}_1 = a \cdot \vec{v}_2$

(kollinear, wenn alle Gleichungen das selbe a ergeben)

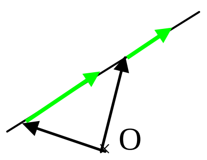
kollinear

Punktprobe, ob der Punkt P_1, der zu Stützvektor von g_1 gehört, auch auf g_2 liegt

Ansatz: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$

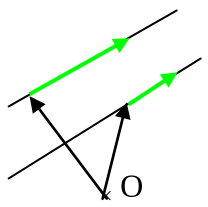
P_1 liegt auf g_2

Die Geraden sind identisch: $g_1 = g_2$.



P_1 liegt nicht auf g_2

Die Geraden sind parallel: $g_1 \parallel g_2$.



nicht kollinear

Untersuchung auf Schnittpunkte *im Raum:**

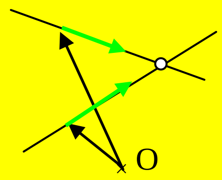
Ansatz: $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Man wählt zwei der Gleichungen aus und löst das entsprechende Gleichungssystem und berechnet daraus die Werte von s und t.

Einsetzen in die obige Vektorgleichung ergibt zwei Vektoren. Stimmen beide überein, so hat man den Schnittpunkt – ansonsten gibt es keinen Schnittpunkt.

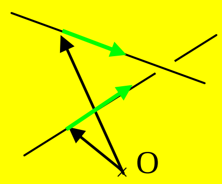
Schnittpunkt

Die Geraden schneiden sich.



kein Schnittpunkt

Die Geraden sind windschief.



*Bei Geraden *in der Ebene* ist alles viel einfacher: Da ist an dieser Stelle (bei „nicht kollinear“) schon klar, dass sich g_1 und g_2 schneiden. Zur Berechnung des Schnittpunktes löst man das Gleichungssystem $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$ und setzt dann wieder ein.

Bastelarbeiten

Thema: Lineare Algebra - Vektorrechnung

Aufgabe 1

In der OGATA der Heinrich-Spoerl-Grundschule in Düsseldorf arbeitet eine Gruppe daran, ein Modell des Schulgebäudes zu bauen. Zuerst wird der Dachstuhl errichtet. Er liegt zunächst auf dem Boden. Die unteren vier Eckpunkte des Modells liegen zu diesem Zeitpunkt auf den Punkten A (-5 ; -3; 0), B (4 ; -3; 0), C (-5 ; 2; 0) und D (4 ; 2; 0). Der Dachfirst (die Verbindungsstrecke zwischen den oberen Ecken) liegt zwischen den Punkten E (-4 ; 0; 2) und F (3 ; 0; 2).

a) Zeichne das Dach in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Um das Dach zu stabilisieren, werden die Eckpunkte A und F sowie die Eckpunkte B und E durch Querstreben verbunden. Stell die Gleichungen der Gerade g auf, auf der die Querstrebe zwischen A und F verläuft, und die Gleichung der Gerade h, auf der die Querstrebe zwischen B und E verläuft.

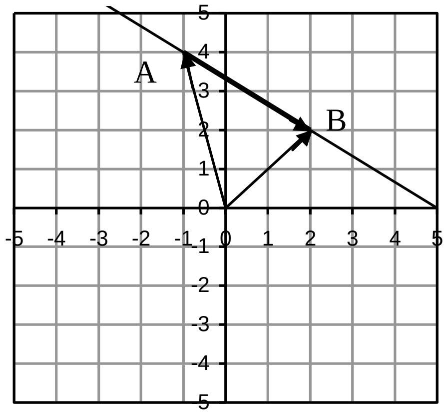
c) Berechne, in welchem Punkt sich die beiden Querstreben schneiden.

d) Eine weitere Strebe auf der anderen Dachseite verbindet die Punkte C und G mit den Koordinaten G (-2 ; -1 ; 2). Die Mitte dieser Strebe soll markiert werden, um den Schornstein daran zu befestigen. Berechne die Koordinaten des entsprechenden Punktes M.

e) Das Dach wird parallel nach oben verschoben, so dass die Ecke E auf den Punkt E´(2 ; 4 ; 5) übergeht. Berechne die Koordinaten des Punktes D´, auf den der Punkt D übergeht.

Übung Vektoren und Geraden

Aufgabe 2



Gegeben sind die beiden Punkte A und B sowie die Gerade g, die durch beide geht.

a) Lies die Koordinaten von A und B ab.
b) Bestimme den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seinen Gegenvektor sowie den Betrag von $\overrightarrow{AB}$.
c) Berechne $4 \cdot \overrightarrow{AB} - 6 \cdot \overrightarrow{OB}$.
d) *Wiederholung*: Stell die Gleichung derjenigen linearen Funktion f auf, deren Graph durch A und B geht.
e) Stell die vektorielle Gleichung (Parametergleichung) der eingezeichneten Geraden g auf. Gib dabei an, welchen Vektor du als Stütz- und welchen du als Richtungsvektor verwendest.
f) Gib einen weiteren Punkt an (außer A und B), der auf g liegt.
g) Überprüfe, welche der folgenden Punkte auf g liegen: C (-13; 12) und D (30 ; -18).
h) Gib einen von $\overrightarrow{AB}$ verschiedenen Vektor an, der kollinear zu $\overrightarrow{AB}$ ist (also ein Vielfaches ist) und einen, der senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ steht.
i) Gib eine weitere Gleichung der Gerade g an, wobei sie einen anderen Stütz- und einen anderen Richtungsvektor verwenden sollen als in **d)**.
j) Zeichne die Parallele zu g ein, die durch den Punkt P (1 ; -3) geht und gib ihre Gleichung an.
k) Zeichne die Gerade ein, die senkrecht (orthogonal) zu g verläuft und durch den Punkt (4 ; -1) geht. Gib ihre Gleichung an.
l) Untersuche die Lagebeziehungen der Geraden g und der Geraden h: $\begin{pmatrix} -12 \\ -14 \end{pmatrix}$ + □ $\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$ und berechne ggf. den Schnittpunkt.
m) Bestimme die Lagebeziehungen der folgenden drei Geraden und bestimme ggf. die Schnittpunkte:

g: $\begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ 27 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$; h: $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$; k: $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix}$.