4 Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist folgendermaßen definiert

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 0{,}5 \cdot (-10) = 2 + 0 - 5 = -3$.

Zeichne die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein und berechne das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$:

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$	**b)** $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	**d)** $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$	**f)** $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$

Berechne für e) auch die Beträge der beiden Vektoren.

Zeichne die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein, bestimme ihren Betrag und den Winkel zwischen den Vektoren und berechne das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$

g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	**h)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	**j)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme den Parameter so, dass die Gleichung erfüllt ist:

k) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ t \end{pmatrix} = 23$	**l)** $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} = -19$
m) $\begin{pmatrix} -12 \\ -15 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} s \\ 4 \end{pmatrix} = 0$	

Zeichne den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ **ein. Bestimme zu ihm fünf verschiedene Vektoren** $\vec{x}$ **Deiner Wahl, die die Gleichung** $\vec{x} \cdot \vec{a}$ **= 0 erfüllen und zeichne auch diese ein.**

Auswertung: Das Skalarprodukt hängt einerseits von den Beträgen der beteiligten Vektoren ab. Verdoppelt man einen der Vektoren, so verdoppelt sich auch das Skalarprodukt und entsprechendes gilt für jede Vervielfachung:

$(a\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot(a\cdot\vec{w}) = a\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$ (vgl. Teilaufg. **a**, **b** und **c**.)

Es gelten auch weitere altbekannte Regeln, die wir aus der Multiplikation reeller Zahlen kennen, wie

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ (vgl. Teilaufg. **b** und **f**. Es handelt sich um das Kommutativgesetz)

Andererseits gelten nicht alle gewohnten Regeln:

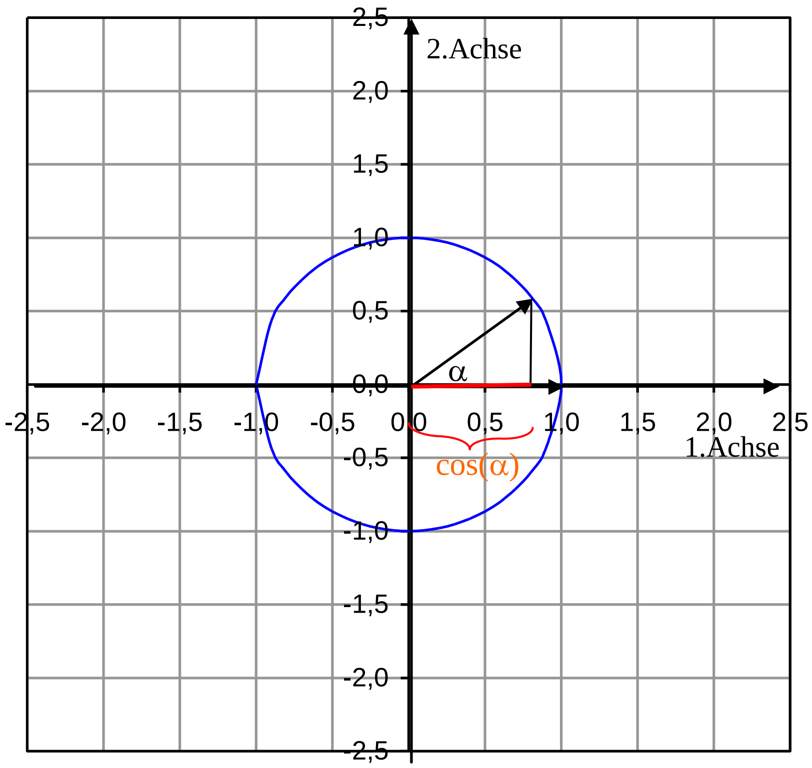
Der Satz vom Nullprodukt gilt nicht, wie Teilaufg. **d** zeigt.

Wenn man einen Vektor mit zwei unterschiedlichen anderen Vektoren multipliziert, kann dennoch dasselbe herauskommen: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$ aber ebenso $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-0{,}5\end{pmatrix} = 1$.

Schon deswegen kann man nicht durch Vektoren dividieren!

Offensichtlich hängt das Skalarprodukt nicht nur von der Länge der beteiligten Vektoren ab – der Winkel muss auch eine Rolle spielen.

Daher wurden in Aufgabe **h** bis **j** nur Einheitsvektoren miteinander multipliziert. Es fiel auf, dass sich Werte zwischen -1 und 1 ergaben, bei 0° der Wert 1 herauskam und bei 90° der Wert 0. Schaut man die Funktionsgraphen oder Wertetabellen grundlegender Funktionen noch einmal an so, stößt man zwangsläufig auf die Co-

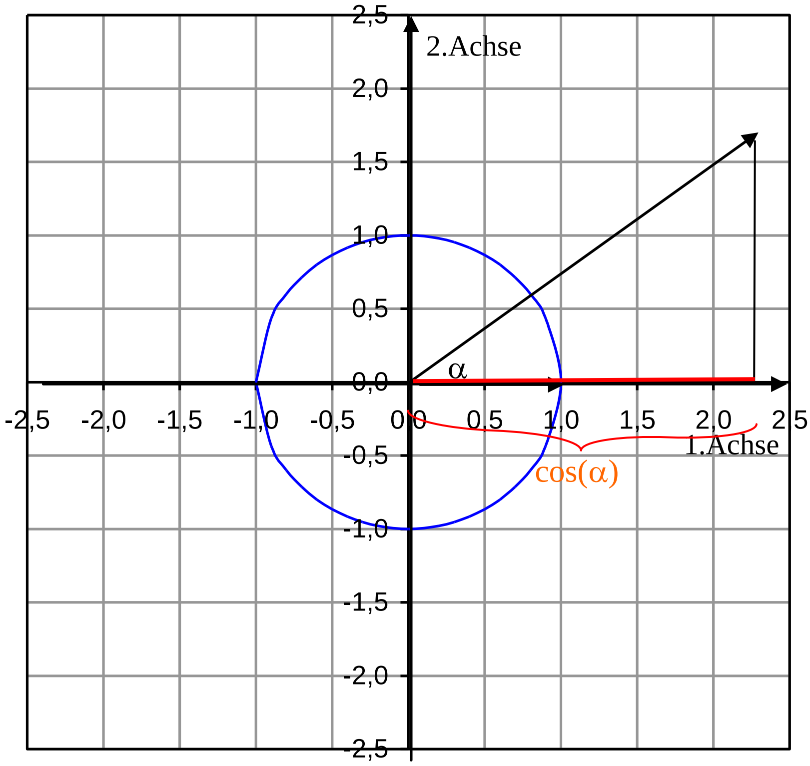


sinusfunktion.

Tatsächlich gilt für zwei Einheitsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$, die miteinander den Winkel α einschließen :

$\vec{e} \cdot \vec{f}$ = cos (α).

Nun sind nicht alle Vektoren Einheitsvektoren. Sagen wir z.B. ein Vektor, der kein Einheitsvektor ist – z.B. das Dreifache des Vektors $\vec{e}$ aus dem obigen Beispiel - wird mit dem Einheitsvektor $\vec{f}$ multipliziert. Mit der Verdreifachung des Vektors verdreifacht sich auch das Skalarprodukt. Anschaulich bleibt das Skalarprodukt die Projektion des ersten Vektors $\vec{v}$ auf den Einheitsvektor $\vec{f}$.



Allgemein gilt:

Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und , die miteinander den Winkel alpha einschließen, gilt:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ **=** $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot$cos (α).

Anschaulich: In diesem Fall ist $\vec{v} \cdot \vec{w}$ die Länge der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{w}$ multipliziert mit der Länge von $\vec{w}$.

Regeln:

<u>Kommutativgesetz</u>: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

<u>Distributivgesetze</u>:

$(s\,\vec{a}) \cdot (t\,\vec{b}) = (st)\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Bem: Demgegenüber gilt der Satz vom Nullprodukt offensichtlich nicht: Wenn man zwei Vektoren, die beide nicht gleich dem Nullvektor sind, miteinander multipliziert, kann trotzdem null herauskommen.

Sonderfälle:

Orthogonalität: [...]

Kollinearität und Orientierung: [...]

Anwendungen:

Winkelberechnung: Wenn wir uns für den Winkel interessieren, den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander einschließen, sollten wie uns nach einer Gleichung umsehen, in der dieser Winkel in irgend einer Form vorkommt.

Zum Glück kennen wir so eine: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Daraus ergibt sich sofort: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Um nun □ zu ermitteln, benötigen wir die Umkehrfunktion des Cosinus - sie heißt Arcuscosinus (arccos oder auf vielen Taschenrechnern $\cos^{-1}$)

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

Beispiel: Gesucht ist der Winkel α

zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 = 50$.

$|\vec{a}| = \sqrt{(10^2+(-5)^2)} = \sqrt{125}$;

$|\vec{b}| = \sqrt{(6^2+2^2)} = \sqrt{40}$;

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{50}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{40}} \approx 0{,}70710678$$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}70710678) = \underline{\underline{45°}}$.