Normalengleichungen von Geraden und Ebenen

Einstiegsproblem

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- **a)** Gib einen Vektor $\vec{n}$ an, der orthogonal zum Richtungsvektor von g ist.
- **b)** Nenne drei verschiedene Punkte A, B und C, die auf der Geraden g liegen.
- **c)** Berechne das Skalarprodukt $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n}$ und $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{n}$. Was fällt auf?
- **d)** Erkläre das Ergebnis von **c)**.

Auswertung

Offensichtlich kann man einen zu einer Geraden senkrecht stehenden Vektor $\vec{n}$ und das Skalarprodukt benutzen, um eine Geradengleichung aufzustellen. Aufgrund dieser Feststellung verdient ein senkrecht zu einer Gerade bzw. Ebene stehender Vektor eine eigene Bezeichnung: Er heißt *Normalenvektor* zu der gegebenen Gerade (in der Ebene) bzw. Ebene (im Raum).

Allgemein gilt: Ist $\vec{n}$ orthogonal zur Gerade g in der Ebene (bzw. zur Ebene E im Raum), und P ein beliebiger Punkt auf der Gerade (Ebene), so ist

$$\vec{n} \cdot \vec{x} \quad = \underbrace{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}}_{c}$$

eine Gleichung, die die Gerade g (die Ebene E) eindeutig festlegt. Sie heißt *Normalengleichung* von g (von E). c ist dabei eine reelle Zahl.

Entsprechend der Definition des Skalarprodukts kann man diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$n_1 x_1 + n_2 x_2 = c$ (bzw bei Ebenen im Raum: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = c$).

In dieser Form heißt sie *Koordinatengleichung*.

Bezogen auf unser obiges Beispiel erhalten wir:

Normalengleichung: $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 19$;

Koordinatengleichung: $2x_1 + 3x_2 = 19$.

Bemerkung

Merkwürdigerweise lässt sich eine Gerade im Raum nicht auf diese elegante Art in eine Gleichung fassen. Warum eigentlich nicht?

Arbeiten mit der Normalenform

Was die neue Form bringt, merkt man erst, wenn man sie auf unterschiedliche Fragestellungen anwendet.

Punktprobe: Liegen die Punkte P (32 ; -15) und Q (-58, 49) auf der Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x} = 19$?

Punktprobe mit der Parameterform	**Punktprobe mit der Normalenform**
$\begin{pmatrix}32\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ 32 = 2 – 6 t | – 2 $\wedge$ -15 = 5 + 4 t | - 5 $\Leftrightarrow$ 30 =-6 t | :(-6) $\wedge$ -20 = 4 t| :4 $\Leftrightarrow$ t = -5 $\wedge$ t = -5, d.h., P liegt auf g. $\begin{pmatrix}-58\\49\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ -58 = 2 – 6 t | – 2 $\wedge$ 49 = 5 + 4 t | - 5 $\Leftrightarrow$ -60 = -6 t | :(-6) $\wedge$ 44 = 4 t| :4 $\Leftrightarrow$ t = 10 $\wedge$ t = 11 d.h., Q liegt nicht auf g.	$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}32\\-15\end{pmatrix} = 64 - 45 = 19$, d.h., P liegt auf g. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-58\\49\end{pmatrix} = -116 + 147 \neq 19$, Q liegt nicht auf g.

Vergleiche selbst!