Wiederholung Winkel

Das entscheidende Mittel zur Bestimmung von Winkeln ist das Skalarprodukt.

Das Skalarprodukt lässt sich nämlich sehr komfortabel koordinatenweise berechnen, zugleich hängt es aber mit den Beträgen der beteiligten Vektoren und dem Winkeln zwischen ihnen zusammen:

Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$\vec{a} * \vec{b}$ **=** $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ **=** $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ **(Gleichung 1)**

Sonderfall: Stehen beide Vektoren senkrecht zueinander, so ist der Cosinus gleich Null (cos (90°) = 0). Darauf beruht die Funktion des Skalarprodukts als Testinstrument für Orthogonalität:
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{a} * \vec{b} = 0$.

Die obige Gleichung 1 kann man leicht umformen, um damit einen Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen:

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

<u>1. Schritt</u>: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. **(Gleichung 2)**

Man berechnet also zuerst das Skalarprodukt der beiden Vektoren und ihre Beträge und teilt dann das Skalarprodukt durch diese Beträge.

<u>2. Schritt</u>: $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

Beispiel: Gesucht ist der Winkel α zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{a} * \vec{b} = 10 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 = 50.$
$|\vec{a}| = \sqrt{(10^2 + (-5)^2)} = \sqrt{125};$
$|\vec{b}| = \sqrt{(6^2 + 2^2)} = \sqrt{40};$

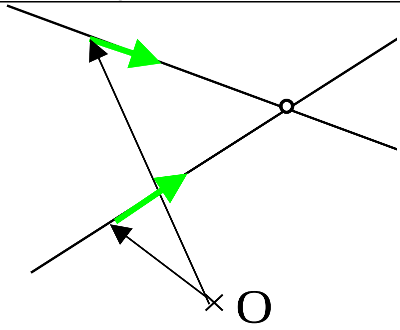
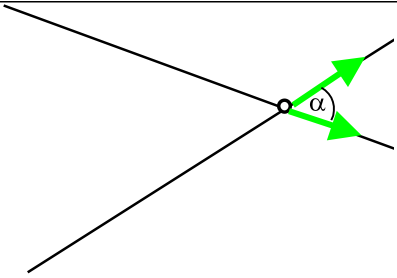
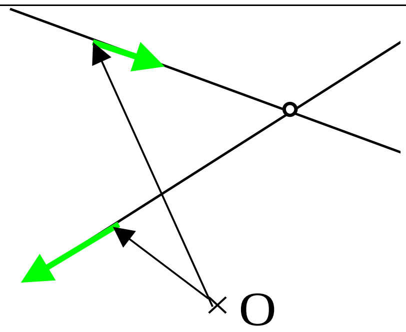
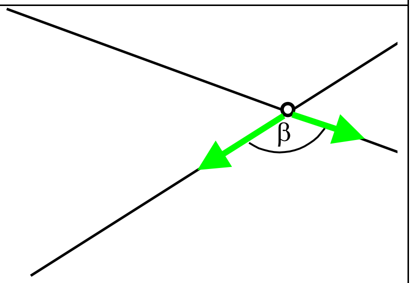
$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{50}{\sqrt{125}\sqrt{40}} \approx 0{,}70710678$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}70710678) = \underline{\underline{45°}}.$

Das ist das Handwerkszeug, auf das man auch zurückgreift, um Winkel zwischen Geraden oder Ebenen zu berechnen.

Berechnung des Winkels zwischen zwei Geraden

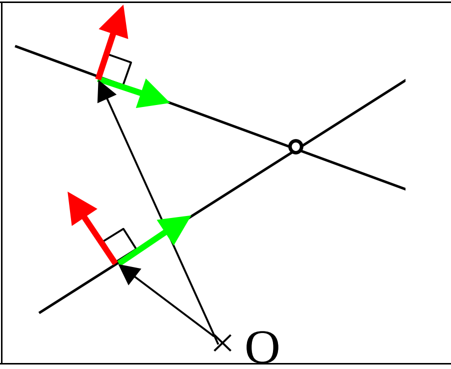
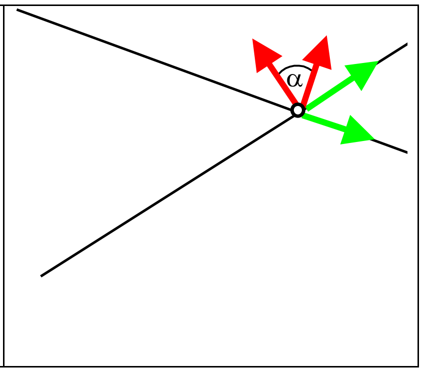
Bei der Berechnung von Schnittwinkeln zweier Geraden sind noch einige Details zu beachten:

	Geraden mit Orts-und Richtungsvektoren	Schnittwinkel zwischen den Geraden
Der Schnittwinkel der Geraden entspricht offensichtlich dem Winkel der Richtungs-vektoren. Im dargestellten Fall erhält man den spitzen Schnittwinkel.		
Leider könnte man bei den gleichen Geraden auch andere Richtungs-vektoren wählen und würde dadurch zu einem anderen Winkel kommen – nämlich zum stumpfen Gegenwinkel des oben dargestellten. ($\alpha = 180° - \beta$)		

Um Eindeutigkeit zu erzielen, einigt man sich auf den *spitzen Winkel*. Um ihn zu erhalten, muss man die Gleichung 2 leicht abwandeln:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{a} * \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$ **(Gleichung 3)**

Handelt es sich um zwei Geraden *in der Ebene*, so können sie auch in Normalenform gegeben sein. Nicht, dass es schwierig wäre, daraus die Parameterform zu bilden, aber zur Berechnung des Schnittwinkels ist das gar nicht nötig: Der Winkel zwischen den Normalenvektoren ist der selbe wie der zwischen den Richtungsvektoren – oder es ist eben dessen Gegenvektor.
Man kann also genau so gut in Gleichung 3 die Normalenvektoren einsetzen und damit den Winkel berechnen.

Der Schnittwinkel der Geraden entspricht offensichtlich dem Winkel der Richtungsvektoren. Im dargestellten Fall erhält man den spitzen Schnittwinkel.		

$\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n}_1 * \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

(Das entspricht Gleichung 3 nur mit anderen Benennungen.)

Berechnung des Winkels zwischen zwei Ebenen

Will man den Winkel berechnen, in dem zwei Ebenen zueinander stehen, so kommt man um die Verwendung von Normalenvektoren nicht herum.

<u>1. Schritt</u>: Sind die Ebenen – oder it auch nur eine der beiden – in Parameterform gegeben, so ist zuerst die Bestimmung von Normalenvektoren nötig.
<u>2. Schritt</u>: Dann erfolgt die Winkelberechnung wie gehabt: mit Gleichung 3

$\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n}_1 * \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

und anschließender Berechnung von α mit der Arcuscosinusfunktion ($\cos^{-1}$).

Beispiel: Gegeben ist die Ebene E_1 in Parameterform:

$E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, s, t $\in \mathbb{R}$

Zu bestimmen ist der Winkel zwischen E_1 und der x_1-x_3-Ebene.

<u>Lösung</u>: Die Gleichung der x_1-x_3-Ebene lautet bekanntlich $\vec{x} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, s, t $\in \mathbb{R}$

Aber hier wird ja nur ein Normalenvektor der Ebene benötigt. Der Einfachste ist

$\vec{n}_1 = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Größer ist der Aufwand, um einen Normalenvektor zu E_1 zu bestimmen:

$\vec{n}_2 * \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{n}_2 * \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4n_1 + 5n_2 + 6n_3 = 0$ (I)
$\wedge\ 7n_1 + 8n_2 + 9n_3 = 0$ (II)
$\Leftrightarrow$ 3(I) $\quad 12n_1 + 15n_2 + 18n_3 = 0$ (III)
-2(II) $\quad \wedge\ \underline{-14n_1 - 16n_2 - 18n_3 = 0}$ (IV)
(III)+(IV) $\quad -2n_1 - n_2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad n_2 = -2\, n_1$

Wähle nun: $n_1 = 1$

$\Rightarrow \quad n_2 = -2$

Einsetzen in (I):

$4 - 10 + 6\, n_3 = 0$

$\Leftrightarrow 6\, n_3 = 6$

$\Leftrightarrow n_3 = 1$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0{,}8165$$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}8165) = \underline{\underline{35{,}26°}}$

Berechnung des Winkels zwischen einer Gerade und einer Ebene

Noch etwas anders sieht es aus, wenn der Schnittwinkel zwischen einer Gerade und einer Ebene zu bestimmen ist. Wie bereits oben beschrieben benutzt man bei einer Ebene dazu den Normalevektor. Nun ist da noch die Gerade – und eine Gerade im Raum hat keine Normalenform. Immerhin kann man den Winkel zwischen dem Normalenvektor und dem Richtungsvektor der Ebene bestimmen – nennen wir den zugehörigen Winkel α. Jeder Richtungsvektor der Ebene steht im rechten Winkel zum Normalenvektor und schließt daher mit dem Richtungsvektor der Gerade den spitzen Winkel $\alpha = 90° - \alpha$ ein.

$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{w} * \vec{n}|}{|\vec{w}| \cdot |\vec{n}|}$, wobei α der gesuchte Winkel ist, $\vec{w}$ der Richtungsvektor der Gerade und $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene.

Übungen

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Winkel zwischen beiden. Geben Sie zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollineare Vektoren $\vec{v}_2$ und $\vec{w}_2$ an, so dass sich ein spitzer Winkel zwischen beiden ergibt.

Kontrolle: Rundet man den Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf eine Nachkommastelle, so ist die Quersumme 18.

Die Punkte A (7 | 5), B (3 | 6) und C (-1 | 0) bilden ein Dreieck.

Zeichen Sie das Dreieck. Stellen Sie die Gleichungen der Geraden auf, auf denen die Dreiecksseiten liegen Berechnen Sie die drei Winkel zwischen jeweils zwei der drei Geraden. *Kontrolle*: *Als Winkelsumme erhalten Sie 140,6°*. Erklären Sie, wie das möglich ist, wo doch die Summe der Innenwinkel im Dreieck bekanntlich immer 180° ergibt.

c) Gegeben sind die Ebenen E_1: $\begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} * \vec{x} = 42$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen.

Kontrolle: wählt man $n_1 = 1$ so erhält man $n_1+n_2+n_3=8$. Der Winkel ist ein besonderer Winkel.