Lore Lorentz
LORE LORENTZ SCHULE

Kurvendiskussion $x^3 - 2\,x^2$

$f\,(\,x\,) = x^3 - 2\,x^2$;

Definitionsmenge: $D(f)$ = IR

Ableitungen:
$f'(x) = 3\,x^2 - 4 \cdot x$
$f''(x) = 6\,x - 4$
$f'''(x) = 4$

Symmetrie:
Es liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor, da der Funktionsterm in der Normalform sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält.
oder:
$f\,(-x) = 3\,x\,2\ +\ 4\,x\ \neq\ f\,(x)$, aber auch $\neq -f(x)$, also liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor.

Verhalten für betraglich große x („Fernverhalten“):
Der Graph von f verläuft vom III. Quadranten in den I. Quadranten, da der Leitkoeffizient $a = 1$ positiv und der Grad $n = 3$ ungerade ist.
oder anders ausgedrückt:
Grenzwerte:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, da der Leitkoeffizient positiv und der Grad ungerade ist.

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$f(0) = 0$, also $S_y\,(\,0\,;\,0\,)$;
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 = 0$ | Ausklammern
$\Leftrightarrow x^2\,(\,x - 2 \cdot\,) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x = 0$ (doppelt) $\vee$ $x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ (doppelt) $\vee$ $x = 2$
$S_{x1}\,(\,0\,|\,0\,)$ (Berührpunkt), $S_{x2}\,(\,2\,|\,0\,)$

Extrempunkt(e) / Sattelpunkt(e):
notwendige Bedingung: $f\,'(\,x\,) = 0$
$3 \cdot x^2 - 4 \cdot x = 0$ | Ausklammern
$\Leftrightarrow x\,(\,3\,x - 4\,) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3\,x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$
hinreichende Bedingung: zusätzlich $f\,''(\,x\,) \neq 0$
$f''(0) = -4 < 0$, d.h. lok. Maximalstelle bei $x = 0$

$f''(\frac{4}{3}) = 4 > 0$, d.h. lok. Minimalstelle bei $x = \frac{4}{3}$

$f(\frac{4}{3}) \approx -1{,}185$

lok. H.P. (0|0); lok. T.P. ($\frac{4}{3}$|$-1{,}185$)

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

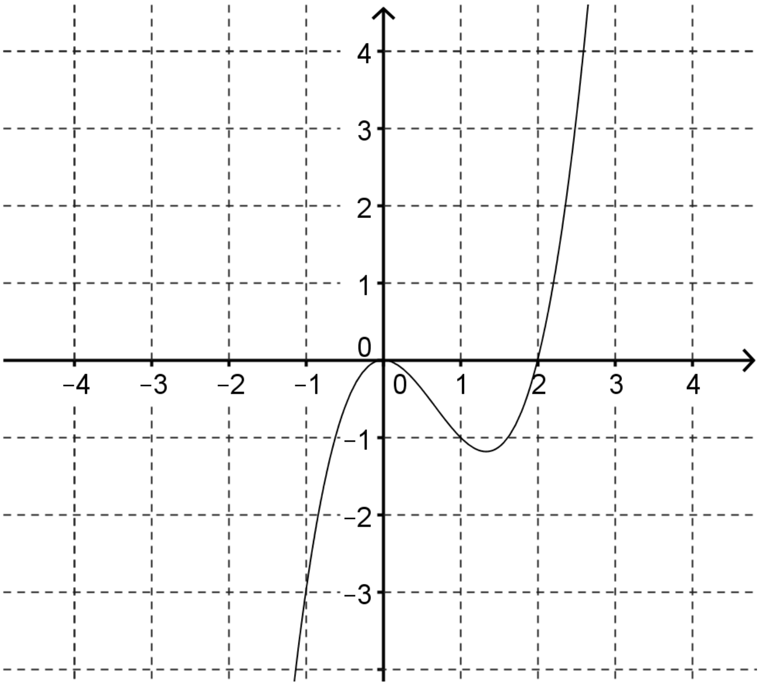
$$6x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

hinreichende Bedingung: zusätzlich f''' (x) $\neq$ 0

$f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$,

d.h. Wendestelle bei $x = \frac{2}{3}$

W.P. ($\frac{2}{3}$| -0,593)



Weitere Aufgaben:

Stell die Gleichung der Tangente von f an der Stelle 2 auf.

Schnittpunkte mit der Funktion t mit t (x) = 4 x – 8:
$f(x) = t(x)$
$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 = 4x - 8$
$\Leftrightarrow x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8 = 0$
systematisches Probieren (Einsetzen von 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8). Erfolg bei x = 2: f (2) = 0

Polynomdivision (alternativ : Horner-Schema):
$(x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8) : (x - 2) = x^2 - 4$
$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2 \vee x = -2$
$\Leftrightarrow x = 2$ (doppelt) $\vee x = -2$

Demnach ist t die Tangente von f bzgl. der Stelle x = 2.

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen f und t

$d(x) = f(x) - t(x)$
$= x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8$

eine Stammfunktion der Differenzfunktion: $D(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - 2 \cdot x^2 + 8x = 0$

Betrag des bestimmten Integrals: $A = \left| \int_{-2}^{2} (x^3 - 2 \cdot x^2 - 4x + 8)\, dx \right| = \underline{\underline{32}}$