Die Idee der Funktion

1.1 Einführung

Technik funktioniert nicht immer allein durch Tüfteln und Schrauben. Oft ist es wichtig, Größen zahlenmäßig berechnen zu können. Glücklicherweise stellt die Mathematik für diejenigen, die sich mit ihr beschäftigen jede Menge Hilfsmittel hierzu bereit.

Beispiel 1

Ein Fahrzeug mit Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{10\frac{m}{s}}$ bremst mit der Bremsverzögerung $\mathbf{-2}\ \frac{m}{s^2}$. Für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v(t)}$, die es nach $\boldsymbol{t}$ Sekunden noch hat, gilt dann:

$\boldsymbol{v\,(t)\ =\ -2\,t\ +\ 10}$

($\boldsymbol{t}$: Zeit in $\boldsymbol{s}$ seit Beginn des Bremsvorgangs, $\boldsymbol{v(t)}$: Momentangeschwindigkeit in $\boldsymbol{\frac{m}{s}}$ zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t}$)

Aufg. 1: Wie schnell ist das Fahrzeug nach 3 Sekunden?
(das heißt: Löse händisch = ohne Taschenrechner)

Beispiel 2

In einem belasteten Spannungsteiler (was immer das ist) gilt laut Formelsammlung:

R_1 Einzelwiderstand in Ω, R_2 Einzelwiderstand in Ω, R_{2L} Ersatzwiderstand in Ω,
R_L Lastwiderstand in Ω

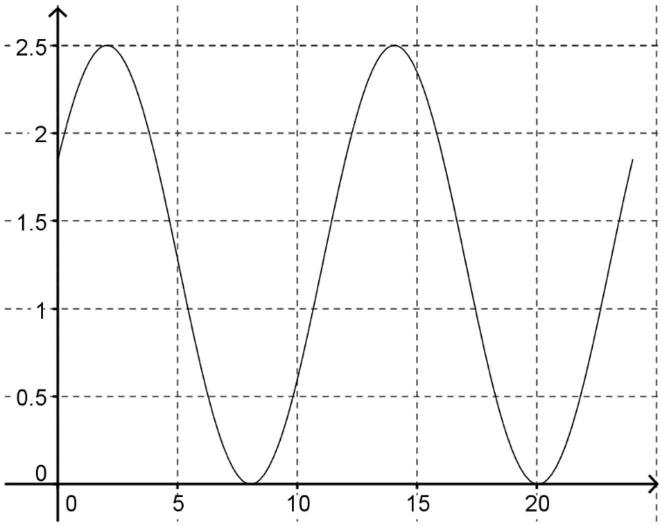
$$R_{2L} = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_1 + R_L}$$

In einem konkreten Fall sind zwei Werte bekannt, wir sagen mal:
R_2 = 40 [Ω], R_L Lastwiderstand = 60 [Ω]

Dann gilt: $R_{2L}(R_1) = \frac{2400}{R_1+60}$

Aufg. 2: Berechne $R_{2L}(140)$ – und formuliere, was du da im physikalischen Sachzusammenhang überhaupt berechnet hast.

Beispiel 3



Seeleute müssen sich über die Höhe des Wasserstandes Gedanken machen, die von den Gezeiten (Ebbe und Flut) beeinflusst wird. Sie benutzen dazu in der Regel Tabellen (und inzwischen sicherlich auch Computerprogramme). Um diese Tabellen aufzustellen und die Software zu entwickeln, war zunächst die Bestimmung entsprechender Messwerte nötig. Auf deren Basis wurden dann passende Gleichungen entwickelt. Die Höhe des Wasserstandes h am 20.10.2013 an der Küste von Helgoland in Abhängigkeit von der Zeit wird (recht grob) durch folgende Gleichung wiedergegeben:

$$h(t) = 1{,}25 \cdot sin(\frac{\pi}{6}t + 0{,}5) + 1{,}25$$

(t: Zeit nach Mitternacht in h, $h(t)$: Höhe des Wasserstandes in m)

Hinweis: Bei der Arbeit mit dem Taschenrechner ist zu beachten, dass er für diese Funktion auf Bogenmaß (RAD) gestellt sein muss. (Taste Mode und dann auf RAD stellen, wie das beim Nspire geht, findest du hier). Ansonsten erwartet der Taschenrechner die Eingabe in Winkelmaß – also in Grad.

Aufg. 3a: Lies am Graph ab, wann am Nachmittag der Wasserstand besonders hoch ist („Hochtide").
Berechne den Wasserstand um 12 Uhr mittags. Diesmal darfst du einen Taschenrechern oder ein CAS benutzen: .

Gemeinsamkeiten der Beispiele:

Kennt man eine Größe (die unabhängige Größe), so ist die andere (die abhängige Größe) dadurch exakt bestimmt. Für jeden Zeitpunkt kann ich in Beispiel 1 die Momentangeschwindigkeit exakt berechnen, in Beispiel 2 für jeden Einzelwiderstand R_1 den Ersatzwiderstand $R_{2\mathrm{L}}$, in Beispiel 3 für jeden Zeitpunkt des angegebenen Tages den zugeordneten Wasserstand an der Helgoländischen Küste.

Die Grundidee ist: man kann eine Zahl aus einer bestimmten Menge für x (oder t, …) einsetzen und erhält dann genau zugeordnete Zahl ($f(x)$ oder $h(t)$, …).
So etwas bezeichnet man in der Mathematik als Funktion. (←Unter dem Link findet du die Definition und grundlegende Informationen)

Die Mathematik – so sagte der Physiker Galileo Galilei – ist die Sprache der Natur. Wollen wir sie verstehen, müssen wir uns einige Vokabeln einprägen:

Häufig darf man nur *bestimmte* Zahlen in eine Funktion einsetzen. Setzt man z.B. $t = -4$ oder $t = 10$ in die Funktion v aus Beispiel 1 ein, macht das keinen Sinn. Die Menge aller Zahlen, die man einsetzen darf, heißt Definitionsmenge der Funktion.
Zu Beispiel 1 schreibt man: $D(v) = [\,0;\ 5\,]$, d.h. man darf für t alle Zahlen zwischen 0 und 5 einsetzen. (Falls dir die Intervallschreibweise $[\,0;\ 5\,]$ noch nicht bekannt ist, schlag nach unter Intervall).
Um nun herauszufinden, wie schnell das Fahrzeug nach 3 Sekunden ist, rechnet man $v(3) = -2 \cdot 3 + 10 \;=\; 4$.
Eine Zahl t, die wir einsetzen, nennen wir Stelle. Wenn wir einen Graph zeichnen, tragen wir sie auf der ersten Achse (häufig: „x-Achse") ein.
Im Unterschied dazu nennen wir die Zahl, die dieser Stelle zugeordnet wird (also das „Rechenergebnis") Funktionswert.

Wer sich noch etwas unsicher fühlt im Umgang mit diesen Variablen, kann sich alles in Ruhe am Beispiel des Lackverbrauchs bei der Taschenmesserproduktion anschauen: Lackbeispiel

So weit so gut – was kann man damit anfangen?

Man kann Sachfragen klären. Das ist doch ein schöner Anlass für einige Aufgaben.

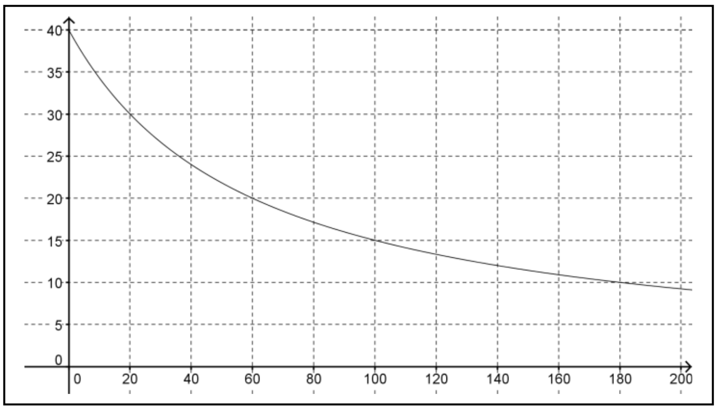
Aufgabe 3 (Bremsvorgang, siehe oben Bsp. 1)

a) Wie schnell ist das Fahrzeug nach 4 Sekunden? (Das könnte interessant sein, wenn es dann einen Aufprall gibt).

b) Berechne, wie lange es dauert, bis das Fahrzeug hält. (Kann eine Rolle spielen bei der Berechnung des Bremsweges)

c) Zeichne den Graph von v.

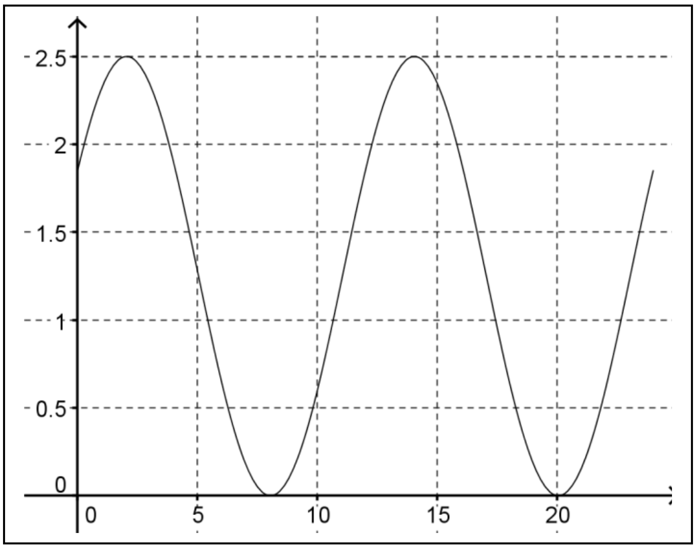
Aufgabe 4 (Widerstand, siehe oben Bsp. 2)



a) Bestimme zeichnerisch und rechnerisch den Ersatz-widerstand R_{2L} für $R_1 = 20\ \Omega$.

b) Bestimme zeichnerisch und rechnerisch, bei welchem Einzelwiderstand R_1 der Ersatzwiderstand $= 20\ \Omega$ beträgt.

Aufgabe 5 (Wasserstand/Gezeiten Bsp. 3)



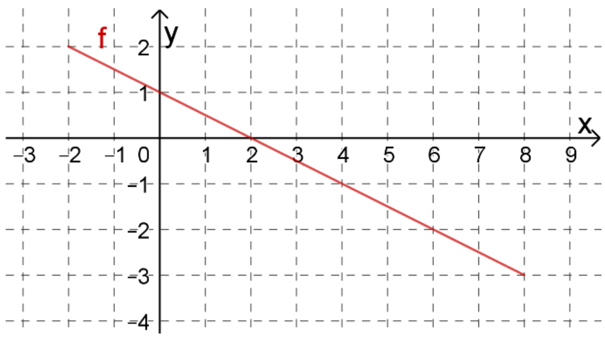
a) Bestimme die Höhe des Wasserstandes um 15:00 Uhr wahlweise graphisch oder rechnerisch.

b) Momentan steht das Wasser bei 2,5 m. Bestimme die Uhrzeit graphisch.

Aufgabe 6

Alles klar bei den Grundbegriffen im Zusammenhang mit Funktionen?

a) Gegeben ist der nebenstehende Funktionsgraph der Funktion f_1.
Gib die Definitionsmenge an.
Welchen Wert nimmt f_1 an der Stelle 6 an?
An welcher Stelle nimmt f_1 den Wert 0,5 an?
Gib die Koordinaten des tiefsten Punktes auf dem Graph an.



b) Gegeben ist die Funktion f_2 mit der Gleichung $f_2(x) = -2 \cdot (x - 3);\ x \in \mathbb{R}$.
Welchen Wert nimmt die Funktion f_2 an der Stelle -10 an?
An welcher Stelle nimmt f_2 den Wert 10 an?

c) Gegeben ist die Funktion f_3 mit der Gleichung $f_3(x) = (x-4)^2$.
Welchen Wert nimmt die Funktion f_3 an der Stelle -1 an?
* Gibt es eine andere Stelle, an der f_3 denselben Wert annimmt?

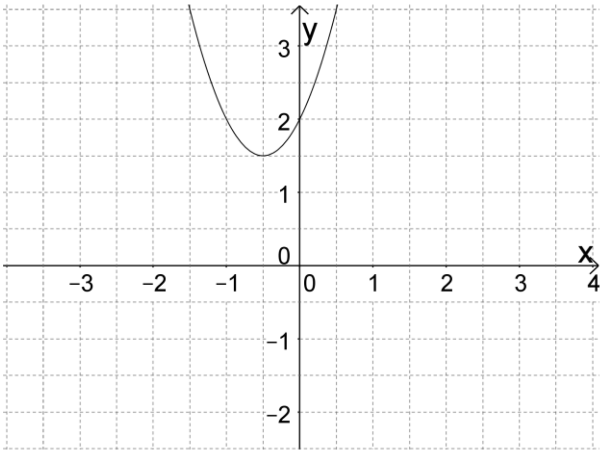
d) $f_4(x) = 3x^2 + 1.\ D(f_4) = [-10; 7]$
Welche der folgenden Punkte liegen auf dem Graph von f_4?
$P_1(2|15)$; $P_2(0{,}5 \mid 1{,}25)$; $P_3(-3|28)$; $P_4(-\sqrt{5}|16)$; $P_5(10|301)$;.
⭐ Bestimme x_5 so, dass der Punkt $P_5(x_5|4)$ auf dem Graph von f 4 liegt.
(Tipp?)

e) Ordne zu, welcher der folgenden Funktionen f_5 bis f_9 zu den folgenden Graphen G_1 bis G_4 passt. (Tipp: Setze einfache Zahlen für x ein und schau, welcher Graph passt! Man benutzt dabei die sogenannte „Punktprobe")

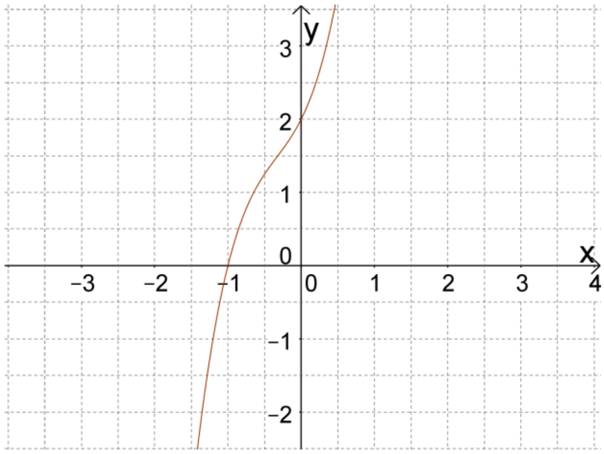
$f_5(x) = -2\,x + 2;$

$f_6(x) = 2\,x^2 + 2\,x + 2;$ $\qquad$ $f_7(x) = x^{\,2} + 2\,x + 2;$

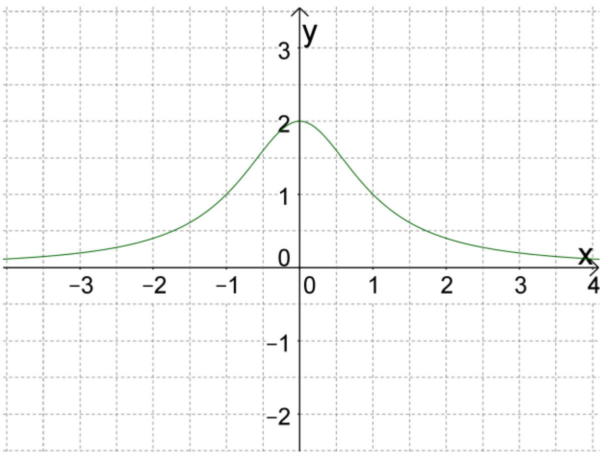
$f_8(x) = 2\,x^{\,3} + 2\,x^{\,2} + 2\,x + 2;$ $\qquad$ $f_9(x) = \frac{2}{x^2+1}$.



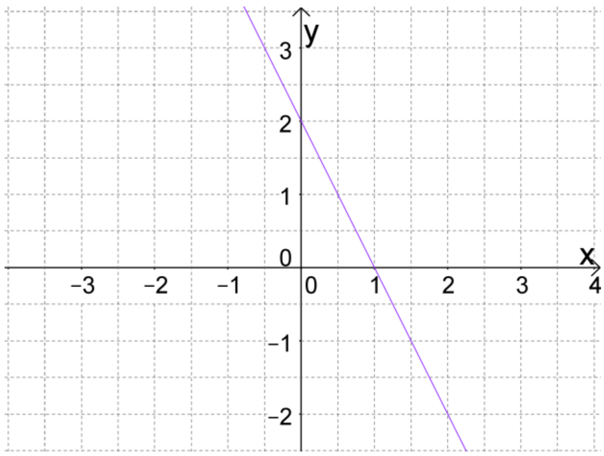
G_1



G_2



G_3



G_4

Auswertung

Inzwischen dürften die Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungsformen deutlich geworden sein.

- Ist nur die Funktionsgleichung bekannt, so kann man damit alles exakt berechnen – es fehlt allerdings die Übersicht über den gesamten Verlauf.

- Auch die in einer Tabelle enthaltenen Informationen sind exakt (vom eventuell nötigen Runden der berechneten Funktionswerte einmal abgesehen). Sie geben aber meist nur einen Ausschnitt der Gesamtinformation wieder – da nur endlich viele Zahlen eingesetzt werden können. Dafür gewinnt man an Übersicht.

- Noch anschaulicher lässt sich der Zusammenhang als Funktionsgraph darstellen. Leider lassen sich – selbst bei einem ganz exakt gezeichneten Graph - die Koordinaten der einzelnen Punkte, die für eine bestimmte Fragestellung interessant sein können, in der Regel nur ungenau ablesen. Die Ungenauigkeiten beim Zeichnen und beim Ablesen verhindern also das oft geforderte exakte Lösen eines Problems.

Kurzübersicht

Ein Beispiel soll helfen, sich an die eingeführten Begriffe zu gewöhnen:

Beispiel 4

Funktion	g mit $g(x) = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 2$
Funktionsterm	$x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 2$
Funktionsgleichung	$g(x) = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + 2$
Definitionsmenge	$D(g) = \mathbb{R}$
Wertemenge[1]	$W(g) = \mathbb{R}$
z.B. die **Stelle 4**	Hier ist 4 aus der Definitionsmenge herausgegriffen: $x = \mathbf{4}$
Funktionswert von g an der Stelle **4**	Den errechnet man durch Einsetzen: $g(\mathbf{4}) = \mathbf{4}3 + 2 \cdot \mathbf{4}2 - 3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 86$
Entsprechender **Punkt auf dem Funktions-graphen**	Der entsprechende Punkt, der zur Stelle **4** gehört, hat die Koordinaten (**4** | 86)

[1] Das zu überprüfen übersteigt im Moment noch unsere Mittel – etwas Geduld bitte!