Glossar: faktorisierte Form

faktorisierte Form einer kubischen Funktion (Grad 3) [Analysis]

Eine Gleichung der Form
$f(x) = a \cdot (x - x_{N1}) \cdot (x - x_{N2}) \cdot (x - x_{N3})$, beschreibt immer eine kubische Funktion,
wobei x_{N1}, x_{N2}, und x_{N3} beliebige reelle Zahlen sind.
Der sogenannte Leitkoeffizient a darf allerdings nicht Null sein.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+2)(x-3)(x-5)$ ist demnach eine kubische Funktion.
Man kann sie durch Ausmultiplizieren auf Normalform bringen:

$$\frac{1}{2}\,(x+2)(x-3)(x-5)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x+2)\,(x^2 - 3\,x - 5\,x + (-3)\cdot(-5))$$

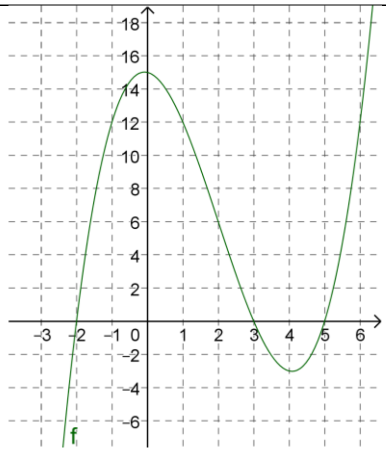
$$= \frac{1}{2}\,(x+2)\,(x^2 - 8\,x + 15)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^3 + 2x^2 - 8\,x^2 - 16x + 15x + 30)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^3 - 6\,x^2 - x + 30)$$
$$= \frac{1}{2}\,x^3 - 3\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 15$$

Der Vorteil der faktorisierten Form ist, dass man bei ihr die Nullstellen sofort erkennt:
$\frac{1}{2}\,(x+2)(x-3)(x-5)$ kann nur Null werden,
wenn $(x+2)$ Null ist (also $x = -2$) oder $x - 3$ Null ist (also x = 3) oder wenn $x - 5$ Null ist (also $x = 5$).

Merke: Das Vorzeichen ändert sich dabei! (Das ist bei doppelten Nullstellen allerdings anders)



Suchst du also eine kubische Funktion mit den Nullstellen 2,5, 8 und -10, so ist jede Funktion $a \cdot (x - 2{,}5)\,(x - 8)\,(x + 10)$ geeignet.
Das a (den Leitkoeffizienten) kannst du dir aussuchen, nur die Null ist verboten.

Um die faktorisierte Form zu einer vorgegebenen Funktion zu ermitteln, muss man daher die Nullstellen bestimmen:

Bsp.:

$$f(x) = 2\,x^3 - 20\,x^2 + 48\,x$$

Null setzen: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ x\,(2x^2 - 20x + 48) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow\ x = 0 \lor x^2 - 10x + 24$ | quadratische Ergänzung

$\Leftrightarrow\ x = 0 \lor x^2 - 10x + 25 = -24 + 25$

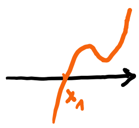
$\Leftrightarrow\ x = 0 \lor (x - 5)^2 = 1$

$\Leftrightarrow\ x = 0 \lor x - 5 = 1 \lor x - 5 = -1$

$\Leftrightarrow\ x = 0 \lor x = 6 \lor x = 4$

Also ist $f(x) = a\,x\,(x - 6)\,(x - 4)$. Der Leitkoeffizient a ist aus der Normalform bekannt: $a = 2$,
also $f(x) = 2x(x - 6)(x - 4)$

Bem.: Eine kubische Funktion hat entweder genau eine einfache Nullstelle



oder genau zwei – dann muss es eine doppelte Nullstelle und eine einfache sein:

oder drei (einfache).

Mit dem TI-Nspire CAS geht all das ohne große Umstände: hier

Kannst du´s?
Nullstellen aus der faktorisierten Form ablesen und eine quadratische Funktion zu vorgegebenen Nullstellen basteln: **Check**
Die Normalform in die faktorisierte Form umformen: **Check**
Die faktorisierte Form in die Normalform umformen: **Check**

Faktorisierte Form allgemein: hier
Faktorisierte Form bei quadratischen Funktionen: hier
Faktorisierung mit dem Nspire CAS: hier

Links zu ganzrationalen Funktionen: hier