LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Fernverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Fernverhalten [Analysis]

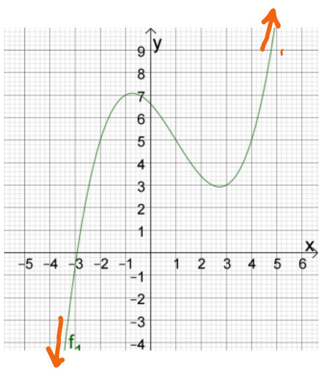
Beim Fernverhalten einer Funktion geht es das Verhalten „weit weit draußen“, also für betraglich große x.

Das entscheidende hierbei sind die Grenzwerte
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

anschaulich:
Es geht darum, wie sich der Funktionsgraph für sehr große x (wie z.B. 10000) und für sehr kleine x (wie -10000) verhält: Wenn der Bildschirmausschnitt groß genug gewählt ist, interessiert man sich also dafür, was am rechten oder linken Rand des Diagramms beim Graph passiert.

Bsp. 1
Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3:
$$f_1(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 - 1{,}2x + 6{,}6$$

Der Graph „kommt von links unten“,
also gilt:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
("$x \to -\infty$" unter dem „Limes“ weist darauf hin, dass das links passiert,
" $= -\infty$" bedeutet: von unten)

Und er „geht nach rechts oben“, also gilt:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
("$x \to \infty$" unter dem „Limes“ weist darauf hin, dass das rechts passiert,
" $= \infty$" bedeutet: nach oben)

Regeln:

Meist ist $f(x)$ in der Normalform gegeben, z.B.
$$f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 - x + 15$$
Dann entscheidet allein der Teil mit dem höchsten Exponenten über das Fernverhalten:
$$f(x) = -0{,}1x^3 + 2x^2 - x + 15$$
Der Leitkoeffizient -0,1 ist negativ, also geht es „am Ende nach

unten“ ($\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$)
Der Grad (der höchste Exponent in der Normalform) ist 3, also eine ungerade Zahl.
Also „kommt f nicht aus der Richtung, in die der Graph am Ende geht, sondern aus der entgegengesetzten Richtung“ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$)

Allgmein gilt:
Bei einer ganzrationalen Funktion entscheiden Grad und Leitkoeffizient über das Fernverhalten (Grenzwert für x gegen -∞ und für x gegen ∞)

Es gilt:
Ist der Leitkoeffizient a_n von f positiv, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Ist der Leitkoeffizient a_n von f negativ, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
Ist der Grad n von f gerade, so ist sind beide Grenzwerte identisch: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$,
ansonsten haben beide das entgegengesetzte Vorzeichen: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Bsp.: Gegeben ist ein Funktion h in Normalform, die folgendermaßen beginnt: $h(x) = -0{,}02x^8 + \cdots$
Dann ist der Leitkoeffizient (das ist $a_8 = -0{,}02$) negativ, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$$

Weiterhin ist der Grad (das ist $n = 0$) gerade und daraus folgt, dass sich das Vorzeichen beim Grenzwert für x gegen $-\infty$ umkehrt, also

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$$

Mehr zum **Fernverhalten bei gebrochen-rationalen Funktionen:** hier

Mehr zum **Fernverhalten von e-Funktionen**: hier

Merkhilfe:
Der Fernverhaltens-Hampelmensch …

	ungerader Grad: n=2 oder 4 oder … Dann sind beide Grenzwerte gleich („von oben, nach oben“…)	**gerader Grad** n=1 oder 3 oder … Dann sind beide Grenzwerte unterschiedlich („von oben, nach unten“…) ∞
positiver Leitkoeffizient $a > 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ 
negativer Leitkoeffizient $a < 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ 	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 

$-\infty$

$-\infty$